# Iteration, Newton-Raphsons metod

Kjell Holmåker

19 november 2003

## Iteration

Rekursionsformler av formen $x_n = f(x_{n-1})$ uppträder ofta. Användning av en sådan rekursionsformel brukar kallas *iteration*, eftersom man använder funktionen $f$ om och om igen. Iteration används ofta för att lösa ekvationer numeriskt.

**Exempel 1.** Sök en rot till ekvationen

$$x \cdot \sqrt[3]{1+x} = 0,2, \quad x > 0.$$

Ekvationen kan också skrivas

$$x = \frac{0,2}{\sqrt[3]{1+x}}, \quad x > 0. \tag{1}$$

Man kan lätt visa att (1) har exakt en rot $\alpha$ (se Sats 1 nedan). Då högerledet i (1) är mindre än $0,2$ för $x > 0$, måste vi ha $0 < \alpha < 0,2$. I första approximationen bör vi då kunna försumma $x$ jämfört med 1 i $\sqrt[3]{1+x}$. Vi får

$$\alpha \approx x_1 = 0,2.$$

Om vi nu i stället ersätter $x$ i högerledet av (1) med $x_1$, bör vi få en bättre approximation av $\alpha$, nämligen

$$\alpha \approx x_2 = \frac{0,2}{\sqrt[3]{1+x_1}} \approx 0,1882.$$

Fortsätter vi på detta sätt får vi

$$\alpha \approx x_3 = \frac{0,2}{\sqrt[3]{1+x_2}} \approx 0,1888,$$
$$\alpha \approx x_4 = \frac{0,2}{\sqrt[3]{1+x_3}} \approx 0,1888.$$

Det förefaller troligt att $\alpha \approx 0,1888$ med fyra korrekta decimaler. ■

Betrakta nu allmänt en ekvation av formen

$$x = f(x). \tag{2}$$

Vi skall försöka lösa (2) med iteration. Utgå då från ett startvärde $x_0$ och generera talen $x_1, x_2, \ldots$ genom rekursionsformeln

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Ekvivalent med (3) kan vi skriva

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{3'}$$

Vår förhoppning är att talföljden $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ skall konvergera mot en rot till (2). Det gör den dock inte alltid, utan vi behöver göra vissa antaganden om funktionen $f$. Vi skall förutsätta att $f$ uppfyller följande villkor:

(i) $f$ är definierad och kontinuerlig i ett intervall $I = [a, b]$.

(ii) $f(x) \in I$, då $x \in I$.

(iii) $f$ är deriverbar i $I$, och det finns en konstant $k < 1$ så att $|f'(x)| \leq k$ för $x \in I$.

Om $x$ och $y$ är två punkter ur $I$, finns enligt medelvärdessatsen ett tal $\xi$ mellan $x$ och $y$, så att $f(x) - f(y) = (x - y)f'(\xi)$. Eftersom $\xi \in I$, ger villkoret (iii) att

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|. \tag{4}$$

**Anmärkning**. En funktion som uppfyller (4), kallas *Lipschitzkontinuerlig* med Lipschitzkonstant $k$. Det räcker att $f$ uppfyller (ii) och (4) med $k < 1$.

**Sats 1.** *Antag att $f$ satisfierar* (i)–(iii)*. Då har* (2) *en entydigt bestämd lösning $x = \alpha$ i $I$.*

*Bevis.* Bilda $g(x) = x - f(x)$. Då är $g$ kontinuerlig på $I$, och vi har $g(a) = a - f(a) \leq 0$ och $g(b) = b - f(b) \geq 0$ (eftersom både $f(a)$ och $f(b)$ tillhör $I$ enligt (ii)). Enligt satsen om mellanliggande värden finns minst en punkt $\alpha$ i $I$ sådan att $g(\alpha) = 0$, dvs. $\alpha = f(\alpha)$. Antag att $\bar{\alpha} \in I$ också är en rot till (2), så att $\bar{\alpha} = f(\bar{\alpha})$ . Då är enligt (4)

$$|\alpha - \bar{\alpha}| = |f(\alpha) - f(\bar{\alpha})| \leq k|\alpha - \bar{\alpha}|,$$

och då $k < 1$, måste vi ha $\bar{\alpha} = \alpha$, vilket visar entydigheten. ■

Villkoret (ii) garanterar att följden $x_0$, $x_1$, ... är väldefinierad för ett godtyckligt $x_0 \in I$, ty om något $x_p \in I$, så ger (3′) och (ii) att också $x_{p+1} \in I$. Därmed fås med induktion att $x_n \in I$ för alla $n$. Vi skall nu bevisa att $x_n$ konvergerar mot $\alpha$ då $n \to \infty$, och vi skall också härleda en feluppskattning. Då $f$ är kontinuerlig på $I$, är också $|f|$ kontinuerlig, och alltså antar $|f|$ ett största värde på det slutna och begränsade (kompakta) intervallet $I$. Vi sätter

$$m = \max_{x \in I} |f(x)|. \tag{5}$$

**Sats 2.** *Antag att $f$ satisfierar* (i)–(iii)*. För godtyckligt $x_0 \in I$ konvergerar följden $x_0$, $x_1$, $x_2$, ... definierad genom* (3) *mot $\alpha$, den entydigt bestämda roten i $I$ till* (2)*. Vidare gäller*

$$|x_n - \alpha| \leq k^n(|x_0| + m), \tag{6}$$

*där $m$ ges av* (5)*.*

*Bevis.* Vi har redan visat (i Sats 1) att det existerar en entydigt bestämd rot $\alpha \in I$ till (2). Vidare har vi sett ovan att $x_n \in I$ för alla $n$. Nu ger (4)

$$|x_n - \alpha| = |f(x_{n-1}) - f(\alpha)| \leq k|x_{n-1} - \alpha| \quad \text{för } n = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Upprepad användning av (7) ger

$$|x_n - \alpha| \leq k|x_{n-1} - \alpha| \leq k^2|x_{n-2} - \alpha| \leq \cdots \leq k^{n-1}|x_1 - \alpha| \leq k^n|x_0 - \alpha|. \tag{8}$$

Eftersom $0 \leq k < 1$, så gäller att $k^n \to 0$ då $n \to \infty$, och alltså får vi av (8) att $x_n \to \alpha$ då $n \to \infty$. Enligt (5) är

$$|x_0 - \alpha| = |x_0 - f(\alpha)| \leq |x_0| + |f(\alpha)| \leq |x_0| + m,$$

varför (8) ger

$$|x_n - \alpha| \leq k^n |x_0 - \alpha| \leq k^n(|x_0| + m),$$

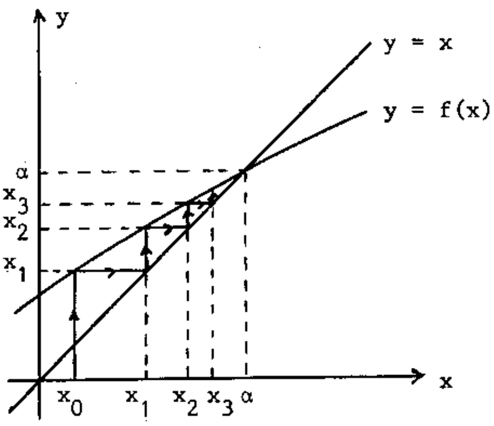
vilket visar (6). ■

Betrakta åter Exempel 1. Vi har där $f(x) = \frac{0,2}{\sqrt[3]{1+x}}$, och vi kan ta $I = [0, 1]$. Förutsättningarna (i)–(iii) är uppfyllda med $k = 0,2 \cdot \frac{1}{3}$, och vi har $m = 0,2$. Enligt (6) är (eftersom $x_0 = 0$)

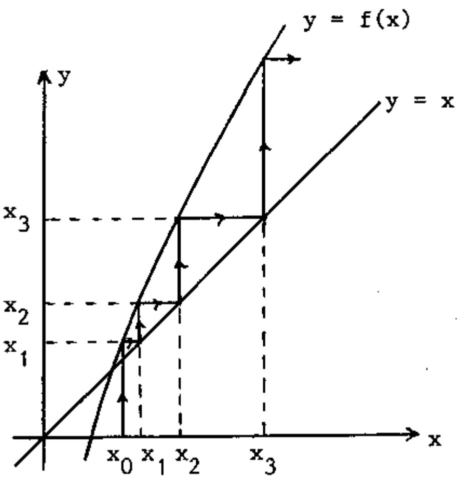
$$|x_4 - \alpha| \leq \left(\frac{0,2}{3}\right)^4 \cdot 0,2 < 4 \cdot 10^{-6},$$

vilket visar att $\alpha = 0,1888$ korrekt avrundat till fyra decimaler.

Figurerna 1 och 2 visar hur iterationen $x_n = f(x_{n-1})$ kan åskådliggöras grafiskt. I Figur 1 är $|f'(x)| \leq k < 1$, och följden $x_n$ konvergerar; i Figur 2 är däremot $x_n$ divergent.




Figur 1




Figur 2

**Exempel 2.** Lös ekvationen $x^3 + 2x - 1 = 0$. Eftersom funktionen $x^3 + 2x - 1$ är strängt växande, finns exakt en rot $\alpha$. Om man vill använda iteration, måste ekvationen skrivas på formen $x = f(x)$, vilket kan göras på många sätt. Tre möjligheter är följande:

$$\text{a)} \quad x = \sqrt[3]{1 - 2x}, \qquad \text{b)} \quad x = \frac{1}{2}(1 - x^3), \qquad \text{c)} \quad x = \frac{1}{x^2 + 2}.$$

I a konvergerar inte iterationerna, medan man i b och c får värdet $0,45340$ efter 10 resp. 7 iterationer utgående från $x_0 = 0$.

I b är $f(x) = \frac{1}{2}(1 - x^3)$. Låt oss ta $I = [0, \frac{1}{2}]$. Då är $0 < f(x) \leq \frac{1}{2} = m$, och $k = \max_{x \in I} |f'(x)| = \frac{3}{2} \cdot 0,25$. Enligt Sats 2 är $|x_{10} - \alpha| \leq (\frac{3}{2} \cdot 0,25)^{10} \cdot \frac{1}{2} < 3 \cdot 10^{-5}$. Alltså är $\alpha = 0,4534$ med fyra korrekta decimaler. Analogt analyseras c. ■

Naturligtvis kan en talföljd $x_n$ erhållen genom iteration som i (3) ha ett eget intresse och uppkomma på annat sätt än som en metod att lösa ekvationen $x = f(x)$ numeriskt.

**Exempel 3.** Undersök om talföljden $x_n$, definierad av $x_0 = 0$ och

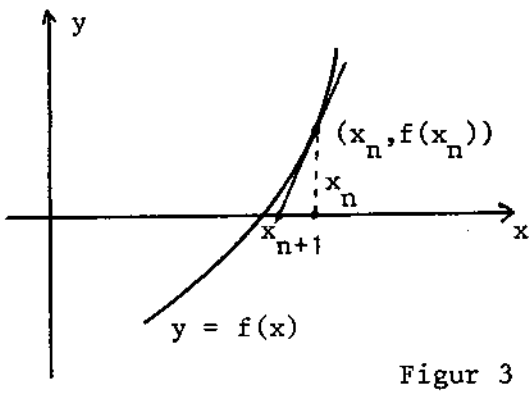
$$x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n} \qquad \text{för } n = 0,\, 1,\, \dots\,,$$

är konvergent eller divergent.

I detta fall är rekursionsformeln av formen (3′) med $f(x) = \sqrt{3+x}$. Låt $I$ vara intervallet $[0, 3]$. Vi har $0 < f(x) \le \sqrt{6} < 3$ för $x \in I$, och vidare är $|f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{3+x}} \le \frac{1}{2\sqrt{3}} < 1$ för $x \in I$. Förutsättningarna (i)–(iii) är alltså uppfyllda, och enligt Sats 2 konvergerar $x_n$ mot den entydigt bestämda lösningen till ekvationen $x = \sqrt{3+x}$ i $I$. Vi får $x^2 - x - 3 = 0$, $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 3}$. Men $x > 0$, varför $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$ ■

## Newton-Raphsons metod

Antag att vi önskar lösa en ekvation $f(x) = 0$. Vi kan då skriva om ekvationen så att den blir av formen $x = F(x)$, och sedan kan vi försöka lösa den senare ekvationen med iterationen $x_{n+1} = F(x_n)$. En sådan omskrivning kan ske på många sätt; vi skall här beskriva en särskilt effektiv iterationsmetod, kallad Newton-Raphsons metod. Den motiveras kanske enklast geometriskt. Om metoden har givit oss $x_n$ som approximation till en rot till $f(x) = 0$, får vi nästa approximation $x_{n+1}$ genom att dra tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(x_n, f(x_n))$ och söka dess skärning med $x$-axeln; se Figur 3.




Figur 3

Tangentens ekvation är

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n),$$

och $y = 0$ ger här $x = x_{n+1}$. Alltså är rekursionsformeln

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, \dots\,. \tag{9}$$

Vi ser att (9) är av formen $x_{n+1} = F(x_n)$ med

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,.$$

Observera att $x = F(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$ (om $f'(x) \neq 0$).

Antag att $f(x) = 0$ har en rot $\alpha$, att $f$ har kontinuerlig andraderivata och att $f'(\alpha) \neq 0$. Då kan man visa, att om begynnelseapproximationen $x_0$ ligger tillräckligt nära $\alpha$, så konvergerar följden $x_n$ i Newton-Raphsons metod mot $\alpha$, och konvergensen är snabb. Det gäller nämligen att

$$|x_n - \alpha| \leq C|x_{n-1} - \alpha|^2$$

för någon viss konstant $C$ (s. k. kvadratiskt konvergens), vilket ger en snabbare konvergens än uppskattningen $|x_n - \alpha| \leq k|x_{n-1} - \alpha|$, som vi hade förut.

I praktiken itererar man tills resultatet inte ändras inom den önskade noggrannheten. Vi kan lätt härleda en feluppskattning, som bygger just på skillnaden mellan två successiva iterationer. Låt oss anta att vi vet, att roten $\alpha$ ligger i ett visst intervall $I$, och att vi har följande uppskattning för $f'(x)$:

$$0 < k_0 \leq |f'(x)| \leq k_1 \qquad \text{för } x \in I. \tag{10}$$

Antag att iterationerna $x_n$ i Newton-Raphsons metod tillhör $I$, och sätt $\delta_n = |x_{n+1} - x_n|$. Ur (9) och (10) får vi då

$$\delta_n = |x_{n+1} - x_n| = \left| \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| \geq \frac{1}{k_1}|f(x_n)|.$$

Vidare ger medelvärdessatsen att det finns ett tal $\xi$ mellan $\alpha$ och $x_n$, alltså i $I$, sådant att

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\alpha) = (x_n - \alpha)f'(\xi),$$

och enligt (10) fås $|f(x_n)| \geq |x_n - \alpha| \cdot k_0$. Allts å är

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k_1}{k_0}\delta_n, \tag{11}$$

vilket är den önskade feluppskattningen.

**Exempel 4.** Lös ekvationen $\mathrm{x}^3 + 2x - 1 = 0$ med Newton-Raphsons metod (jämför Exempel 3). Vi har $f(x) = x^3 + 2x - 1$, $f'(x) = 3x^2 + 2$, och (9) ger

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n - 1}{3x_n^2 + 2}, \qquad n \geq 0.$$

Eftersom $f(0) < 0$ och $f(\frac{1}{2}) > 0$, gäller att roten $\alpha$ tillhör $I = [0, \frac{1}{2}]$ (det finns bara en rot eftersom $f'(x) > 0$). Med $x_0 = 0$ fås $x_3 = 0,4533983\ldots$, och ytterligare iterationer påverkar inte de fem första decimalerna. Närmare bestämt har vi att $\delta_3 = |x_4 - x_3| < 7 \cdot 10^{-7}$. Eftersom $2 \leq |f'(x)| \leq 2,75$ för $x \in I$, och $x_3 \in I$, ger (11) feluppskattningen

$$|x_3 - \alpha| \leq \frac{2,75}{2} \cdot 7 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}.$$

Alltså är $\alpha = 0,45340$ med fem korrekta decimaler. ■