Lösningsförslag till TMA976 den 12/12 2011

① Lös $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = n\,2^n \quad n=0,1,2,\ldots$

Lösning

Karakteristiska polynomet $r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1)$

ger $y_n^{(h)} = A\,2^n + B(-1)^n, \quad n = 0,1,2\ldots$

Ansätt $y_n^{(p)} = n(an+b)\,2^n \quad , n = 0,1,2,\ldots$

Insättning i differensekvationen ger

$$4(a(n+2)^2 + b(n+2)) - 2(a(n+1)^2 + b(n+1)) - 2(an^2+bn) = n$$

dvs $n(16a + 4b - 4a - 2b - 2b - 1) + (16a + 8b - 2a - 2b) = 0, \quad n=0,1,2$

Vi får $a = \frac{1}{12}, \quad b = -\frac{7}{36}$

Lösningen $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = \left(A + \frac{1}{12}n^2 - \frac{7}{36}n\right)2^n + B(-1)^n$

: Svar

② Beräkna $\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{\ln x}$ då $y(x)$ lösning till $(x^2+x)y' = x - y + 1$.

Lösning: För $x > 1$ kan differentialekvationen skrivas

$y' + \frac{1}{x(x+1)}y = \frac{1}{x}$ dvs linjär de av 1:a ordningen

Då $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ fås den integrerande faktorn

$$e^{\int \frac{1}{x(x+1)}dx} = e^{\ln\frac{x}{x+1}} = \frac{x}{x+1}$$

Alltså gäller $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\cdot y(x)\right) = \frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1}$

vilket ger $y(x) = \frac{x+1}{x}\left(\ln(x+1) + C\right)$

Detta ger $\frac{y(x)}{\ln x} = \frac{x+1}{x}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} + \frac{C}{\ln x}\right) =$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x} + \frac{C}{\ln x}\right) \longrightarrow 1, \quad x\to\infty.$$

③

a) Beräkna $f^{(15)}(0)$ för $f(x) = (\sin(x^3))^3$. Svar: 1

Lösning: Då $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ fås att koefficienten framför x^{15} i Taylorutvecklingen kring $x=0$ är $\frac{f^{(15)}(0)}{15!}$.

Då $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + O(t^5), \quad t\to 0$ gäller

$\sin(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{6} + O(x^{15})$ och

$$(\sin(x^3))^3 = \left(x^3 - \frac{x^9}{6} + O(x^{15})\right)^3 = x^9 - 3\frac{x^{15}}{6} + O(x^{21}) =$$

$= x^9 - \frac{1}{2}x^{15} + O(x^{21})$. Alltså gäller $f^{(15)}(0) = -\frac{15!}{2}$

Svar: $-\frac{15!}{2}$

b) Givet $\sum_{k=0}^{9} a_k = 0$ beräkna

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{9} a_k \sqrt{n+k}$.

Lösning: Vi har

$a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \dots + a_9\sqrt{n+9} =$

$= \sqrt{n}\left(a_0 + a_1\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \dots + a_9\sqrt{1+\frac{9}{n}}\right) =$

$= \sqrt{n}\left(a_0 + a_1\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \dots + a_9\left(1+\frac{1}{2}\frac{9}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) =$

$= \sqrt{n}\cdot O\left(\frac{1}{n}\right) \to 0, \quad n\to\infty$

Svar: 0

(4) Konvergerar $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$?

a) Lösning: Då $(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \cdot \ln\ln n}$

$= (e^{\ln n})^{\ln\ln n} = n^{\ln\ln n}$ och $\ln\ln n$ är

strängt växande och $\to\infty$ då $n\to\infty$ gäller att

det finns N så att $\ln\ln n \geq 2$ alla $n \geq N$.

Eftersom $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerar konvergerar

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ enligt jämförelsekriteriet

b) Bestäm konvergensintervallet för

Svar: Serien konvergerar

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\right) x^n$

Lösning: Sätt $a_n = (-1)^n \sin\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\right) \quad n = 1, 2, \dots$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\sin\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^{\frac{1}{n}} =$

$= \frac{1}{(n^{\frac{1}{n}})^{3/2}} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \to 1, \quad n\to\infty$

medför att potensseriens konvergensradie $R = \frac{1}{1} = 1$

För $x = \pm 1$ är potensserien absolutkonvergent då

$|a_n| \leq \frac{C}{n^{3/2}} \quad n = 1, 2, \dots$ för C konstant tillr. stor

Konvergensintervallet $M = [-1, 1]$

Svar: $[-1, 1]$

(5) $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_{n+1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}a_n^3$, $n = 1, 2, \dots$

Visa att serien konvergerar och beräkna följdens gränsvärde

Lösning: Vi ser att $a_2 = -\frac{11}{24}$ och $a_3 > 0$ så vi har att $a_1 < a_2 < a_3$ och $a_n > 0$ för $n \geq 3$.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ växande talföljd: Om $a_{n+1} > a_n$ gäller

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_{n+1}^3 - a_n^3) = \frac{1}{3}\underbrace{(a_{n+1} - a_n)}_{\substack{>0 \\ \text{enl. antagande}}}\underbrace{(a_{n+1}^2 + a_{n+1}a_n + a_n^2)}_{\substack{>0 \\ \text{då } n \geq 3}}$$

då $n \geq 3$.

Då $a_4 > a_3$ (lätt kolla(!)) gäller med induktion att talföljden växande

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uppåt begränsad: Vi ser direkt att om $a_n \leq 1$ gäller $a_{n+1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}a_n^3 \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$. Alltså $a_n \leq 1$ alla n.

Enligt sats om monotona talföljders konvergens följer att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar: Kalla gränsvärdet a.

Då gäller $a \longleftarrow a_{n+1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}a_n^3 \longrightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{3}a^3$, $n \to \infty$

Alltså $a^3 - 3a + 2 = 0$ och $a \in (0, 1]$. Vi ser att $a = 1$ är en rot. Detta ger $0 = a^3 - 3a + 2 = (a-1)(a^2 + a - 2)$ vilket ger att 1 är en dubbelrot och -2 är en rot.

Alltså måste $a = 1$.

Svar: 1

(6) $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$, $g_n(x) = \frac{x}{nx+1}$, $x \in (0,1)$, $n = 1, 2, \ldots$

a) Visa $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar punktvis men inte likformigt på $(0,1)$.

Lösning: För fixt $x \in (0,1)$ gäller $f_n(x) \to 0$, $n \to \infty$

Sätt $f(x) = 0$, $x \in (0,1)$. Det gäller att $f_n \to f$ punktvis på $(0,1)$. Men

$$\sup_{x \in (0,1)} |f_n(x) - f(x)| \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \not\to 0, \quad n \to \infty$$

visar att $f_n \not\to f$ likformigt på $(0,1)$.

b) Visa $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på $(0,1)$.

Lösning: För fixt $x \in (0,1)$ gäller $g_n(x) \to 0$, $n \to \infty$

Sätt $g(x) = 0$, $x \in (0,1)$. Vi har att $g_n \to g$

punktvis på $(0,1)$. Vidare gäller

$$0 \le g_n(x) = \frac{nx}{nx+1} \cdot \frac{1}{n} \le \frac{1}{n} \quad , \; x \in (0,1)$$

och alltså

$$\sup_{x \in (0,1)} |g_n(x) - g(x)| \le \frac{1}{n} \to 0 \,, \quad n \to \infty$$

Alltså gäller $g_n \to g$ likformigt på $(0,1)$.

(7) Se kursbok

(8) a) $a_k > 0 \quad k = 1, 2, \ldots$

Visa att $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = a$ medför $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = a$

Bevis: Då $a_k > 0$ alla k gäller $a \geq 0$

Antag $a > 0$. Fixera $\varepsilon > 0$ med $\varepsilon < a$.

Då $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = a$ finns N så att

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k} - a\right| < \varepsilon \quad \text{för alla } k \geq N$$

Vidare gäller

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_k} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \quad \text{för } k > N$$

och alltså

$$\begin{cases} a_k < (a+\varepsilon)^{k-N} \cdot a_N \\ a_k > (a-\varepsilon)^{k-N} \cdot a_N \end{cases} \quad k > N$$

Detta ger

$$\begin{cases} a_k^{\frac{1}{k}} < (a+\varepsilon) \cdot \left((a+\varepsilon)^{-N} \cdot a_N\right)^{\frac{1}{k}} \to a+\varepsilon \\ a_k^{\frac{1}{k}} > (a-\varepsilon) \cdot \left((a-\varepsilon)^{-N} \cdot a_N\right)^{\frac{1}{k}} \to a-\varepsilon \end{cases} \quad k \to \infty$$

Då $\varepsilon > 0$ godtyckligt litet följer att

$$a_k^{\frac{1}{k}} \to a \,, \quad k \to \infty$$

b) Visa att $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = a$ medför inte allmänt att $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = a$

Bevis: Med

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & k \text{ udda} \\ \frac{2}{k} & k \text{ jämnt} \end{cases}$$

följer att

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{\frac{1}{2k+1}}{\frac{2}{2k}} = \frac{1}{2}\,\frac{2k}{2k+1} \to \frac{1}{2}, \quad k\to\infty$$

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{\frac{2}{2k}}{\frac{1}{2k-1}} = 2\cdot\frac{2k-1}{2k} \to 2, \quad k\to\infty$$

Alltså: $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ existerar ej

Men

$$\sqrt[2k]{a_{2k}} = \left(\frac{2}{2k}\right)^{\frac{1}{2k}} \to 1 \quad k\to\infty$$

$$\sqrt[2k-1]{a_{2k-1}} = \left(\frac{1}{2k-1}\right) \to 1, \quad k\to\infty$$

medför $\sqrt[k]{a_k} \to 1$, $k\to\infty$ och alltså

$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$ existerar och $=1$.

⊛ Då $a=0$ räcker den ensidiga uppskattningen

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < \varepsilon \quad \text{för } k \geq N.$$

Argumentet är analogt