Lösningsförslag till tenta TMA976 den 10/4 2012

(1) Svar: $y(x) = (A - x + \frac{1}{2}x^2)e^x + Be^{-\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + Ce^{-\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})$

Lösning: Diff-ekvationen är av 2:a ordningen, linjär med konstanta koefficienter.

Homogenlösningen $y_h(x)$: Karakteristiska ekvationen $r^3 - 1 = 0$ ger rötterna $r_1 = 1$, $r_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vi får $y_h(x) = Ae^x + Be^{-\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + Ce^{-\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})$

Partikulärlösning $y_p(x)$: Då diff-ekv ges av $(D^3-1)[z(x)] = 3xe^x$ ansätter vi $y_p(x) = z(x)e^x$. Med förskjutningsregeln fås $((D+1)^3 - 1)[z(x)] = 3x$ dvs $z''' + 3z'' + 3z' = 3x$. Sätt $z(x) = x(ax+b)$, derivera och sätt in i diff-ekv. Vi får $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ vilket ger $y_p(x) = (\frac{1}{2}x^2 - x)e^x$.

Allmänna lösningen $y(x)$ ges av $y_h(x) + y_p(x)$. ∎

(2) Svar: $y(x) = (x^2 + x)\ln(1 + \frac{1}{x}) + Ax + Bx^2$, $x > 0$

Lösning: Diff-ekvationen är av Eulers typ. Variabelbyte $t = \ln x$, $x > 0$ ger med $y(x) = \tilde{y}(t(x))$ att

$y'(x) = \tilde{y}'(t(x)) \cdot \frac{1}{x}$, $y''(x) = \tilde{y}''(t(x)) \cdot \frac{1}{x^2} - \tilde{y}'(t(x)) \cdot \frac{1}{x^2}$

Insättning i diff-ekv. ger $\tilde{y}''(t) - 3\tilde{y}'(t) + 2\tilde{y}(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$.

Karakteristiska ekv $r^2 - 3r + 2 = 0$ ger $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ och alltså $\tilde{y}_h(t) = Ae^t + Be^{2t}$. Detta ger $y_h(x) = Ax + Bx^2$ där $y_h(x)$ betecknar den allmänna homogenlösningen till den ursprungliga diff-ekv. Återstår att bestämma en partikulärlösning $y_p(x)$. Ansätt t.ex. $y_p(x) = x \cdot z(x)$ där första faktorn är en homogenlösning. Detta ger

$z''(x) = \frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x}$ varför vi får

$z'(x) = -\frac{1}{x} - \ln x + \ln(1+x) + a$ och

$z(x) = -\ln x - x\ln x + x + (1+x)\ln(1+x) - x + ax + b =$

$= (1+x)\ln(1+\frac{1}{x}) + \frac{a}{2}x^2 + b$ Välj $a=b=0$

Detta ger $y_p(x) = (x+x^2)\ln(1+\frac{1}{x})$. ∎

Kommentar: Svårigheten i uppgiften är att bestämma en partikulärlösning. En metod är att ansätta $y_p(x) = v(x)\cdot z(x)$ där $v(x)$ är en (icke-trivial) homogenlösning till problemet, i vårt fall $v(x) = x$ där $v(x) = Ax + Bx^2$ med $A=1$, $B=0$. Resultatet blir att man får en 1:a ordningens diff-ekv. i z' som man kan lösa med integrerande faktor.

Man kan även notera att diff-ekv kan skrivas som $(\frac{y}{x})'' = \frac{1}{x^2(1+x)}$ varefter kalkylen blir som ovan.

Slutligen kan man också notera att $\tilde{y}'' - 3\tilde{y}' + 2\tilde{y} = \frac{e^t}{1+e^t}$ med $\tilde{y}(t) = z(t)e^t$ och förskjutningsregeln ger $z''(t) - z'(t) = \frac{1}{1+e^t}$ vilken kan lösas med integrerande faktor.

③ Svar: a) existerar och $=0$ b) $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

Lösning: a) Sätt $f(x,y) = \frac{x^3 - 2y^3}{2x^2 + y^2}$. Vi ser att $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ och t.ex. $f(x,0) = \frac{x}{2} \to 0$, $x \to 0$. Gränsvärdet $= 0$ om det existerar. Med polära koordinater fås

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = r\left|\frac{\cos^3\theta - 2\sin^3\theta}{\cos^2\theta + 1}\right| \leq 3r \to 0,\ r \to 0$$

Alltså existerar gränsvärdet och $=0$.

b) Vi har $f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x})$, $x>0$. Vi noterar att

$$f'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1},\quad f''(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

för $x>0$. Alltså är $f'(x)$ en avtagande funktion för $x>0$ och $f'(x) \to 0$, $x\to\infty$. Alltså $f'(x) \geq 0$ för $x>0$ och $f(x)$ växande funktion för $x>0$.

Vidare

$$x\ln(1+\frac{1}{x}) = x(\ln(1+x) - \ln x) = x\ln(1+x) - x\ln x \to 0$$

då $x \to 0+$ (standardgränsvärden) och

③

$x\ln(1+\frac{1}{x}) = \{\ln(1+t) = t + O(t^2),\ t\to 0\} = x(\frac{1}{x} + O(\frac{1}{x^2})) =$
$= 1 + O(\frac{1}{x}) \to 1,\ x\to\infty$ eller alternativt
$x\ln(1+\frac{1}{x}) = \ln[(1+\frac{1}{x})^x] \to \ln e = 1,\ x\to\infty$ (standard-gränsvärde)

$\boxed{5}$

④ Svar: a) $x + |y| < -1$ b) abs. konv. för $x\in(1,3)$, betingad konv. för $x=1$, divergent förör.

Lösning:

a) För $k = 1, 2, \ldots$ gäller

$$\frac{k^x}{\ln(1+k^y)\ln(1+k^{-y})} = \frac{k^x}{\ln(1+k^{|y|})\ln(1+k^{-|y|})}$$

samt

- $\ln(1+k^{|y|}) \le \ln(2k^{|y|}) = \ln 2 + |y|\ln k$
- $\ln(1+k^{|y|}) \geq |y|\ln k$
- $\ln(1+k^{-|y|}) = k^{-|y|} + O(k^{-2|y|})$ för $|y|>0$.

Vidare gäller att $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^p}{\ln k}$ konvergerar omm $p<-1$ jämförelsekriteriet på gränsvärdesform ger att serien i uppgiften konvergerar omm $x+|y|<-1$.

b) Sätt $t = x-2$ och betrakta potensserien $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^k}{k\ln k}$

Då $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k\ln k}} = 1$ har potensserien konvergensradien 1. Alltså är potensserien absolutkonvergent för $|t|<1$ och divergent för $|t|>1$. För $t=1$ är serien $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$ divergent och för $t=-1$ är serien $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\ln k}$ konvergent enligt Leibniz då $\frac{1}{k\ln k}$ går monotont mot 0, $k\to\infty$. Dock är serien ej absolutkonvergent. Sammanfattningsvis gäller att potensserien är absolutkonvergent för $t\in(-1,1)$, betingad konvergent för $t=-1$ och divergent för övrigt. Med $x = t+2$ fås svaret ovan.

$\boxed{4}$

(5) Lösning: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent medför att $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är konvergent. Sätt $u_k(x) = \frac{a_k x^{2k}}{1+x^{2k}}$, $k=1,2,$ $x \in \mathbb{R}$. Enligt Weierstrass M-sats är $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ likformigt konvergent på $\mathbb{R}$ om $|u_k(x)| \le b_k$, $k=1,2,\ldots$ $x \in \mathbb{R}$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent. Då

$|u_k(x)| \le |a_k|$ för $k=1,\ldots$, $x \in \mathbb{R}$

kan vi välja $b_k = |a_k|$. Slutsatsen följer då $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konv. $\square$

(6) Svar: π

Lösning. Vi noterar att för $x > 0$ gäller

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \sin\left(\frac{2x}{n}\right)}{x(1+x^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2x}{n}\right)}{\frac{2x}{n}} \cdot \frac{2}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

Sätt $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ och $f_n(x) = \frac{n \sin\left(\frac{2x}{n}\right)}{x(1+x^2)}$, $x > 0$, $n = 1,2,\ldots$

Det gäller alltså att $f_n \to f$ punktvis på $(0,\infty)$.

Om det finns en majorerande funktion $g(x)$, dvs

1) $|f_n(x)| \le g(x)$ alla $x \in (0,\infty)$, $n=1,2\ldots$

2) $\int_0^{\infty} g(x)\,dx < \infty$

så gäller $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx =$

$= [2\arctan x]_0^{\infty} = \pi$ enligt känd sats.

Vi noterar att

$$|f_n(x)| \le \begin{cases} \frac{n \cdot \frac{2x}{n}}{x(1+x^2)} = \frac{2}{1+x^2} & \text{för } 0 < \frac{2x}{n} \le 1 \\ \frac{n}{x(1+x^2)} \le \frac{2}{1+x^2} & \text{för } 1 < \frac{2x}{n} \end{cases}$$

Då vidare $\int_0^{\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx < \infty$ fungerar $g(x) = \frac{2}{1+x^2}$ som majorerande funktion $\square$

Kommentar. Då $(0,\infty)$ är ett obegränsat intervall räcker det inte med att visa $f_n \to f$ likformigt på $(0,\infty)$ för att få göra gränsövergång under $\int$-tecknet $\square$

(7) Se textboken

(8) Lösning: Antag att $x(t)$, $a(t)$ och $b(t)$ kontinuerliga på $[0,1]$ och att (*) $x(t) = a(t) + \int_0^t b(s)x(s)\,ds$, $t \in [0,1]$.

Enligt tipset sätter $y(t) = \int_0^t b(s)x(s)\,ds$. $y(t)$ är deriverbar på $(0,1)$ och kontinuerlig på $[0,1]$. Derivera

$$y'(t) = b(t)x(t) = \{(*)\} = b(t)\left(a(t) + \int_0^t b(s)x(s)\,ds\right) =$$
$$= b(t)y(t) + a(t)b(t)$$

Multiplikation med den integrerande faktorn $e^{\int_0^t b(u)du}$ ger

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)e^{-\int_0^t b(u)du}\right) = a(t)b(t)e^{-\int_0^t b(u)du}$$

Integrera från 0 till t och utnyttja $y(0)=0$. Vi får

$$y(t)e^{-\int_0^t b(u)du} = \int_0^t a(s)b(s)e^{-\int_0^s b(u)du}\,ds \quad , \; t \in (0,1]$$

dvs

$$y(t) = \int_0^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(u)du}\,ds \quad , \; t \in [0,1].$$

Om (*) ersätts med (**) $x(t) \le a(t) + \int_0^t b(s)x(s)\,ds$ gäller

$$y'(t) = b(t)x(t) \le \{(**) \text{ och } b(t) \ge 0 \; t\in[0,1]\} \le$$
$$\le b(t)y(t) + a(t)b(t)$$

Multiplikation med $e^{-\int_0^t b(u)du}$ ger

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)e^{-\int_0^t b(u)du}\right) \le a(t)b(t)e^{-\int_0^t b(u)du}$$

och integration från 0 till t med $y(0)=0$ ger på motsvarande sätt

$$y(t) \le \int_0^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(u)}du \qquad t \in [0,1]$$

och det följer att

$$x(t) = a(t) + \int_0^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(u)du}\,ds, \; t \in [0,1] \quad \text{med } (*)$$

(+) $$x(t) \le a(t) + \int_0^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(u)du}\,ds, \; t\in[0,1] \quad \text{med } (**).$$ $\square$

Kommentar: Olikheten (+) används ofta i PDE-sammanhang och kallas Gronwalls olikhet.