Lösningsförslag till TMA976 den 19/12 2012

① Bestäm lösningen till

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 1 \\ y(0) = 0 & (1) \\ \lim\limits_{x\to\infty} y(x) \ \exists & (2) \end{cases}$$

Lösning: Karakteristiska ekvationen $r^2 + r - 2 = 0$ har rötterna $r_1 = 1$, $r_2 = -2$. Detta ger allmänna homogenlösningen $y_h(x) = Ae^x + Be^{-2x}$. Ansätt en partikulärlösning som $y_p(x) = C$, C konstant. Insättning i differentialekvationen ger $C = -\frac{1}{2}$. Den allmänna lösning $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ uppfyller villkoren

(1) : $0 = y(0) = A + B - \frac{1}{2}$

(2) : $A = 0$ då $e^x \to \infty$, $x \to \infty$ och $\lim\limits_{x\to\infty} (Be^{-2x} - \frac{1}{2})$ existerar

Detta ger $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$ och alltså $y(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{2}$.

Svar: $\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{2}$

② Bestäm lösningen till

$$\begin{cases} (xy + y)y' = x^2y^2 + x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Lösning: Differentialekvationen är icke-linjär och av 1:a ordn.

Omskrivning ger $\frac{y}{y^2+1} y' = \frac{x^2}{x+1}$, $x \neq -1$

och vi ser att differentialekvationen är av separabel typ, dvs $g(y)y' = f(x)$ där $g(y) = \frac{y}{y^2+1}$ och $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Integrering ger

$$G(y) = \int \frac{y}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{2}\ln(y^2+1)$$

$$F(x) = \int \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1),$$

för $x > -1$.

$G(y(x)) = F(x) + C$ ger $\ln((y(x))^2 + 1) = (x-1)^2 + \ln((x+1)^2) + C'$

Vi får

$$(y(x))^2 = e^{(x-1)^2}\cdot(x+1)^2\cdot e^{c'} - 1 = e^{(x-1)^2}(x+1)^2 c'' - 1 \quad , x > -1$$

där $c'' > 0$. Villkoret $y(1) = 2$ bestämmer konstanten c''

$$4 = e^0 \cdot 4 \cdot c'' - 1 \quad \text{ger} \quad c'' = \frac{5}{4}$$

För de $x > 1$ som uppfyller $e^{(x-1)^2}\cdot(x+1)^2\cdot\frac{5}{4} - 1 \geq 0$ får

$$y(x) = \sqrt{e^{(x-1)^2}\cdot(x+1)^2\cdot\frac{5}{4} - 1}$$ där vi utnyttjat att $y(1) > 0$

Svar: $y(x) = \sqrt{e^{(x-1)^2}\cdot(x+1)^2\cdot\frac{5}{4} - 1}$

3 a) Taylorutveckla $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ kring 0 med restterm på formen $O(x^8)$

Lösning: Med standardutvecklingarna

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O(x^8) \quad , \quad x \to 0$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4) \quad , \quad t \to 0$$

får vi

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + O(x^8)\right)\right) =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + O(x^8)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + O(x^6)\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{3!} + O(x^4)\right)^3 + O(x^8) =$$

$$= -\frac{1}{3!}x^2 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3!}\right)^2\right)x^4 + \left(-\frac{1}{7!} - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{3!}\right)\left(\frac{1}{5!}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3!}\right)^3\right)x^6 + O(x^8) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + \frac{1}{1134}x^6 + O(x^8)$$

Svar: $-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + \frac{1}{1134}x^6 + O(x^8)$

b) Beräkna $\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right)$

Lösning: Omskrivning ger

$$x\cdot\left(\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right) = \frac{x}{e}\left(1 - e\cdot e^{-x\ln(1+\frac{1}{x})}\right) =$$

$$= \left\{\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3), \ t \to 0\right\} =$$

$$= \frac{x}{e}\left(1 - e^{1 - x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)}\right) = \frac{x}{e}\left(1 - e^{\frac{1}{2}\frac{1}{x} + O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)}\right) =$$

$$= \left\{e^t = 1 + t + O(t^2), \ t \to 0\right\} = \frac{x}{e}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2e} + O\left(\frac{1}{x}\right) \to -\frac{1}{2e} \quad , x \to \infty$$

Svar: $-\frac{1}{2e}$

④ ⓐ För vilka $a>0, b>0$ konvergerar $\sum_{k=0}^{\infty} a^{\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}+\ldots+\frac{1}{b+k}}$?

Lösning: Ett nödvändigt villkor för konvergens är att $a^{\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}+\ldots+\frac{1}{b+k}} \to 0$ då $k\to\infty$. Då $b>0$ är $\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}+\ldots+\frac{1}{b+k}>0$ för $k=0,1,2,\ldots$ och alltså måste $a<1$. Vidare noterar vi att $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{b+k}$ divergerar (jämför med $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ och använd jämförelsekriteriet på gränsvärdesform). Alltså gäller $a^{\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{b+k}} \to 0$ då $k\to\infty$ för $0<a<1$.

För att avgöra om serien i uppgiften konvergerar får vi undersöka hur snabbt $a^{\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{b+k}}$ går mot 0 då $k\to\infty$. Vi noterar att (jfr beviset av $\int$-kriteriet)

$$\int_0^k \frac{1}{b+x}\,dx \le \sum_{l=0}^{k}\frac{1}{b+l} \le \int_0^k \frac{1}{b+x}\,dx + \frac{1}{b}$$

och alltså

$$\ln\left(1+\frac{k}{b}\right) \le \sum_{l=0}^{k}\frac{1}{b+l} \le \ln\left(1+\frac{k}{b}\right)+\frac{1}{b} \qquad k=0,1,2,\ldots$$

Detta ger oss

$$a^{\ln(1+\frac{k}{b})+\frac{1}{b}} \le a^{\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{b+k}} \le a^{\ln(1+\frac{k}{b})}$$

Notera att $a^{\ln(1+\frac{k}{b})} = e^{\ln(1+\frac{k}{b})\ln a} = \left(1+\frac{k}{b}\right)^{\ln a}$, $k=0,1,2,\ldots$

Serien $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$ konvergerar omm $\alpha<-1$. Detta ger oss via jämförelsekriteriet på gränsvärdesform att $\sum_{k=0}^{\infty} a^{\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{b+k}}$ konvergerar omm $\ln a<-1$ dvs $0<a<\frac{1}{e}$, oberoende av $b>0$

Svar: Konvergens omm $0<a<\frac{1}{e}$, $b>0$

ⓑ Beräkna $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k(k+1)}{k!}$

Lösning: Notera att Taylorserien för e^x ges av $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. Denna potensserie är konvergent för varje $x\in\mathbb{R}$ (inses lätt via kvotkriteriet eller rotkriteriet + Stirlings formel). Vi kan alltså derivera potensserien termvis. Speciellt fås

$$\frac{d}{dx}(xe^x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k(k+1)}{k!}$$

Alltså gäller

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k(k+1)}{k!} = \frac{d}{dx}(xe^x)\Big|_{x=3} = (e^x + xe^x)\Big|_{x=3} = 4e^3$$

Svar: $4e^3$

(5) Visa att det finns entydigt bestämt $\alpha > 0$ sådant att

$\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha}}, \sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha}}}, \ldots$ konvergerar och

har gränsvärdet α.

Lösning: Talföljden har formen $x_1 = \sqrt{\alpha}$, $x_{n+1} = \sqrt{\alpha + x_n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Vi noterar att funktionen $\sqrt{\alpha + x}$ är kontinuerlig så

$\boxed{\text{om}}$ $x_n \to \alpha$, $n \to \infty$ så måste

$$\alpha \leftarrow x_{n+1} = \sqrt{\alpha + x_n} \to \sqrt{2\alpha}, \quad n \to \infty$$

dvs $\alpha = \sqrt{2\alpha}$. Följaktligen måste $\alpha = 2$.

Återstår att visa att följden $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n = 1, 2, \ldots$

konvergerar. Här gäller att följden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ är

1) växande (följer direkt från $\sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} < \ldots$

man fås också induktivt från

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \sqrt{2 + x_{n+1}} - \sqrt{2 + x_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\sqrt{2 + x_{n+1}} + \sqrt{2 + x_n}} \quad)$$

2) uppåt begränsad: $x_1 = \sqrt{2} \leq 2$ och

om $x_n \leq 2$ så gäller $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{2+2} = 2$

Satsen om monotona talföljders konvergens ger nu att

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar och gränsvärdet x uppfyller $x = \sqrt{2+x}$

vilket ger $x = 2$. (Man kan också visa konvergensen

med fixpunktssatsen tillämpad på funktionen $f : [1,2] \to [1,2]$

där $f(x) = \sqrt{2+x}$. Notera här att $\max_{x \in [1,2]} |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{3}} < 1$)

Svar: $\alpha = 2$

(6) Avgör om $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $s_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$, konvergerar

likformigt på $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Lösning: Vi observerar att

$s_n(0) = 0 \to 0, \quad n \to \infty$

$s_n(x) = n\,(\cos x)^n \sin x \to 0, \quad n \to \infty$ för $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ då

$0 \le \cos x < 1$ för dylika x.

Alltså $s_n \to s$ punktvis på $[0, \frac{\pi}{2}]$, där $s(x) = 0$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

För att avgöra om funktionsföljden konvergerar likformigt på $[0, \frac{\pi}{2}]$ studerar vi $\max\limits_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |s_n(x) - s(x)| \equiv d_n$

konvergensen är likformig omm $d_n \to 0$, $n \to \infty$ per definition. Nu gäller $\max\limits_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |s_n(x) - s(x)| = \max\limits_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} s_n(x)$.

Vi studerar $s_n(x)$ på $[0, \frac{\pi}{2}]$. Deriverar

$$s_n'(x) = n(\cos x)^{n+1} - n^2 (\cos x)^{n-1} \cdot \sin^2 x =$$

$$= n \cdot (\cos x)^{n+1} \cdot \left[1 - n \tan^2 x\right], \quad x \in [0, \tfrac{\pi}{2}).$$

Vi noterar att $\tan^2 x = \frac{1}{n}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ för $x \approx \frac{1}{\sqrt{n}}$

($\tan x = x + O(x^2)$, $x \to 0$ via Taylorutveckling).

Det gäller $s_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = n \cdot (\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}))^n \cdot \sin\frac{1}{\sqrt{n}} = \{\text{Taylor}\} =$

$$= \underbrace{n \cdot \underbrace{\left(1 - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + O\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right)^n}_{= e^{n \ln(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}))} = e^{n\cdot(-\frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2}))} = e^{-\frac{1}{2} + O(\frac{1}{n})}} \cdot \underbrace{\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\tfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)}_{= \frac{1}{\sqrt{n}}(1 + O(\frac{1}{n}))}}$$

$$= \sqrt{n} \cdot \left(\tfrac{1}{\sqrt{e}} \cdot (1 + O(\tfrac{1}{n}))\right) \cdot \left(1 + O(\tfrac{1}{n})\right) =$$

$$= \sqrt{n} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{e}} \cdot \left(1 + O(\tfrac{1}{n})\right) \longrightarrow \infty \quad \text{då } n \to \infty$$

Alltså $d_n \to +\infty$ då $n \to \infty$ och funktionsföljden s_n konvergerar verkligen inte mot s likformigt på $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Alt: Man noterar att $\boxed{\text{om}}$ $s_n \to s$ likformigt på $[0, \frac{\pi}{2}]$ så gäller (enligt sats i boken)

$$0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} s(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} s_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

vilket ju inte är fallet.

Svar: konvergerar <u>inte</u> likformigt på $[0, \frac{\pi}{2}]$.

⑦ Se PB1

⑧ $s_n \in C^1([0,1])$ med $\max\limits_{x\in[0,1]} |s_n'(x)| \le 1$ för $n=1,2,\dots$
och $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar punktvis på $[0,1]$.
Visa att $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på $[0,1]$.

<u>Bevis:</u> Låt $s(x)$, $x\in[0,1]$, beteckna den punktvisa gränsfunktionen. Observera att vi inte vet om denna är integrerbar eller deriverbar. Vi ska visa att för varje $\tilde{\varepsilon}>0$ finns $\tilde{N}$ så att $|s_n(x)-s(x)|<\tilde{\varepsilon}$ för alla $x\in[0,1]$ för alla $n\ge\tilde{N}$. $\tilde{N}$ får bara bero på $\tilde{\varepsilon}$. Fixera $\varepsilon>0$. Välj <u>ändligt</u> många punkter $x_1,x_2,\dots,x_M$ i $[0,1]$ sådan att

$$0=x_1<x_2<\dots<x_{M-1}<x_M=1, \quad \max_{k=2,3,\dots,M}(x_k-x_{k-1})<\varepsilon.$$

Här beror M på ε. Då M är ändligt finns det ett N så att $|s_n(x_k)-s(x_k)|<\varepsilon$ för alla $n\ge N$ och alla $k\in\{1,2,\dots,M\}$. Notera att för $x\in[0,1]$ gäller

$$|s_n(x)-s_m(x)|\le|s_n(x)-s(x)|+|s_m(x)-s(x)|$$

och alltså $|s_n(x_k)-s_m(x_k)|<2\varepsilon$ för alla $n,m\ge N$ för alla $k\in\{1,2,\dots,M\}$. Nu gäller att för godtyckligt $x\in[0,1]$ finns x_k, $k\in\{1,2,\dots,M\}$ så att $|x-x_k|<\varepsilon$.

$$|s_n(x)-s_m(x)|=\left|\left(s_n(x_k)+\int_{x_k}^{x}s_n'(t)\,dt\right)-\left(s_m(x_k)+\int_{x_k}^{x}s_m'(t)\,dt\right)\right|\le$$

$$\le|s_n(x_k)-s_m(x_k)|+\left|\int_{x_k}^{x}(s_n'(t)-s_m'(t))\,dt\right|\le$$

$$\le|s_n(x_k)-s_m(x_k)|+\left|\int_{x_k}^{x}(|s_n'(t)|+|s_m'(t)|)\,dt\right|\le$$

$$\le|s_n(x_k)-s_m(x_k)|+2|x-x_k| \quad \text{då } \max_{x\in[0,1]}|s_n'(x)|\le 1 \ (\text{alla } n$$

Följaktligen gäller för alla $x\in[0,1]$ att

$$|s_n(x)-s_m(x)|<2\varepsilon+2\cdot\varepsilon=4\varepsilon \quad \text{för alla } n,m\ge N$$

Speciellt följer, genom att låta $m\to\infty$, att

$$|s_n(x)-s(x)|\le4\varepsilon<5\varepsilon \quad \text{för alla } n\ge N$$

Alltså $\max\limits_{x\in[0,1]}|s_n(x)-s(x)|<5\varepsilon$ för alla $n\ge N$.