Lösningsförslag till tentamen TMA976, 2013-12-18

① Lös $y''+4y=(1+\sin x)^2$

Lösning: Kar ekv $r^2+4=0$ ger $r_{1,2}=\pm 2i$ och

$y_h(x)=A\cos(2x)+B\sin(2x)$.

Då $(1+\sin x)^2 = 1+2\sin x+\sin^2 x = \frac{3}{2}+2\sin x-\frac{1}{2}\cos(2x)$

ansätts $y_{p,1}(x)=a+b\cos x+c\sin x$ och $y_{p,2}(x)=\mathrm{Re}(\underbrace{e^{i2x}\cdot z(x)}_{u(x)})$

där $u''+4u=-\frac{1}{2}e^{i2x}$. Vi får då $y_p(x)=y_{p,1}(x)+y_{p,2}(x)$

$y_{p,1}$: Derivering och insättning i $y''+4y=\frac{3}{2}+2\sin x$

ger $(4b-b)\cos x+(4c-c)\sin x+4a=\frac{3}{2}+2\sin x$

dvs $a=\frac{3}{8}$, $b=0$, $c=\frac{2}{3}$. Alltså fås

$y_{p,1}(x)=\frac{2}{3}\sin x+\frac{3}{8}$.

$y_{p,2}$: Förskjutningsregeln ger $-\frac{1}{2}e^{i2x}=(D^2+4)\left[e^{i2x}z(x)\right]=$

$=e^{i2x}\left((D+2i)^2+4\right)[z(x)]=e^{i2x}(D^2+4iD)[z(x)]$ dvs

$z''+4iz'=-\frac{1}{2}$. Ansatsen $z(x)=dx$ ger $d=\frac{i}{8}$ och

alltså $y_{p,2}(x)=\mathrm{Re}\left(e^{i2x}\cdot\frac{i}{8}x\right)=-\frac{x}{8}\sin(2x)$

Svar: $y(x)=A\cos(2x)+\left(B-\frac{x}{8}\right)\sin(2x)+\frac{2}{3}\sin x+\frac{3}{8}$

② Bestäm $y(3)$ då $y'-ay=b$, $y(0)=0$, $y(1)=1$, $y(2)=3$ där a,b reella konstanter

Lösning: Med den integrerande faktorn e^{-ax} fås

(*) $\frac{d}{dx}\left(y(x)\cdot e^{-ax}\right)=be^{-ax}$. Om $a=0$ fås $y(x)=bx+c$

vilket omöjligt då $y(0)=0$, $y(1)=1$ och $y(2)=3$ och

alltså är $a\neq 0$. Integration av (*) ger

$y(x)=e^{ax}\left(-\frac{b}{a}e^{-ax}+c\right)=ce^{ax}-\frac{b}{a}$. Villkoret

$y(0)=0$ ger $c=\frac{b}{a}$ och villkoren $y(1)=1$, $y(2)=3$ ger

$$\begin{cases} \frac{b}{a}(e^{a}-1)=1 & \dots (1) \\ \frac{b}{a}(e^{2a}-1)=3 & \dots (2) \end{cases}$$

Vi får $(e^{2a}-1)=3(e^{a}-1)$ dvs $(e^{a})^2-3e^{a}+2=0$

och alltså $e^{a}=2$ eller 1 men 1 omöjligt då $a\neq 0$.

Alltså $e^a = 2$ och $b = a$. Vi får $y(3) = (e^a)^3 - 1 = 7$

Svar: 7

③ a) Taylorutveckla $(1+\frac{x^2}{2})^{-1}$ med restterm $O(x^8)$

Lösning: Standardutvecklingen $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 +$
$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}t^3 + O(t^4)$, $t \to 0$ ger

$$(1+\frac{x^2}{2})^{-1} = 1 + (-1)\frac{x^2}{2} + \frac{(-1)(-2)}{2}(\frac{x^2}{2})^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{6}(\frac{x^2}{2})^3 + O(x^8) =$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{8} + O(x^8)$$

Svar: $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{8} + O(x^8)$ (jfr. geometrisk serie)

b) $a>0$. Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - (\frac{1}{a})^x}{x}$

Lösning: För $b>0$ gäller $b^x = e^{x \ln b} = \{e^t = 1 + t + O(t^2), t\to 0\} =$
$= 1 + x\ln b + O(x^2)$, $x \to 0$

Alltså: $\frac{a^x - (\frac{1}{a})^x}{x} = \frac{1}{x}(1 + x\ln a - (1 + x\ln\frac{1}{a}) + O(x^2)) =$
$= \ln a - \ln(\frac{1}{a}) + O(x) = 2\ln a + O(x) \to 2\ln a$, $x \to 0$

Svar: $2\ln a$

④ Avgör konvergensen för potensserien $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot k^{1+\frac{1}{k}} \ln k} x^k$ för olika x.

Lösning: Sätt $a_k = \frac{1}{2^k \cdot k^{1+\frac{1}{k}} \ln k}$ $k = 2, 3, \ldots$

Vi noterar att

$$(2^k \cdot k^{1+\frac{1}{k}} \cdot \ln k)^{\frac{1}{k}} = 2 \cdot (e^{(1+\frac{1}{k})\ln k} \cdot \ln k)^{\frac{1}{k}} =$$
$$= 2 \cdot e^{(1+\frac{1}{k})\frac{\ln k}{k}} \cdot e^{\frac{\ln(\ln k)}{k}} \to 2, \ k \to \infty.$$

Alltså gäller $\sqrt[k]{|a_k|} \to \frac{1}{2}$, $k \to \infty$ och

konvergensradien R för potensserien $= \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Det gäller att potensserien divergerar för $|x| > 2$ och är absolut konvergent för $|x| < 2$.

$x = 2$: $\sum_{k=2}^{\infty} a_k 2^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}} \ln k}$

Vi noterar att $k^{1+\frac{1}{k}} \ln k = k \cdot e^{\frac{\ln k}{k}} \cdot \ln k$

Serien $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ divergerar och $\frac{a_k}{\frac{1}{k\ln k}} \to 1$, $k \to \infty$

Alltså: divergerar potensserien för $x = 2$ enligt jämförelsekriteriet på gränsvärdesform.

$x=-2$: Betrakta $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \underbrace{\frac{1}{k\ln k\cdot e^{\frac{\ln k}{k}}}}_{b_k}$

Vi har $b_k \to 0$, $k\to\infty$.

Sätt $h(x) = x\ln x\cdot e^{\frac{\ln x}{x}}$. Vi ser att $h(x)$ växande funktion för $x>M$ för $M>0$ tillräckligt stort då

$$h'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}\left[\ln x + 1 + x\ln x\cdot \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{=\frac{1-\ln x}{x^2}}\right] =$$

$$= e^{\frac{\ln x}{x}}\left(\ln x+1+\frac{\ln x}{x}(1-\ln x)\right) =$$

$$= \underbrace{e^{\frac{\ln x}{x}}}_{>0}\cdot\underbrace{\ln x}_{\substack{>0\\ x>1}}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{\ln x}+\frac{1-\ln x}{x}\right)}_{\to 1,\ x\to\infty} > 0 \text{ för } x>M \text{ något}$$

$M>0$. Alltså: b_k avtar monotont mot 0 för $k>M$.

Leibniz konv krit ger att $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k b_k$ konvergerar.

<u>Svar</u>: absolutkonvergent för $x\in(-2,2)$, betingat konvergent för $x=-2$, divergent för $x\in(-\infty,-2)\cup[2,\infty)$

b) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!\,3^k}$

Lösning: Vi har $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!\,3^k} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac13\right)^{k+1} =$

$$= \frac13\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac13\right)^k = \frac13\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\Big|_{x=\frac13} =$$

$$= \frac13\cdot\left(e^x-1-x\right)\Big|_{x=\frac13} = \frac13 e^{\frac13}-\frac49 \quad \text{eftersom } e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

<u>Svar</u>: $\frac13 e^{\frac13}-\frac49$

(5) $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{3}{2+a_n}$ $n=1,2,\ldots$. Avgör konvergens och beräkna ev. gränsvärde

Lösning: Sätt $f(x)=\dfrac{3}{2+x}$ för $x\in I=[0,2]$ t.ex.

Då gäller $f: I\to I$ avtagande och då $f'(x)=-\dfrac{3}{(2+x)^2}$ och alltså $\max_{x\in I}|f'(x)| = \frac34<1$ är f en kontraktion.

Fixpunktssatsen ger att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot den entydigt bestämda fixpunkten $a\in I$ där $a=\dfrac{3}{2+a}$ dvs $a=1$.

Svar: konvergerar, gränsvärde $=1$.

⑥ Funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+k^2}$. Visa

i) punktvis konvergens för $x \in [0,\infty)$

ii) likformig konvergens för $x \in [0,R]$ för varje $R>0$

iii) undersök likformig konvergens för $x \in [0,\infty)$

Lösning: i) Fixera $x \in [0,\infty)$. Då gäller

$0 \le \frac{x}{x^2+k^2} \le x \cdot \frac{1}{k^2}$ och då $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergerar

så konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+k^2}$ enligt jämförelsekrit.

ii) Fixera $R>0$. Då $0 \le \frac{x}{x^2+k^2} \le R \cdot \frac{1}{k^2}$, $x \in [0,R]$, och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R}{k^2}$ konvergerar följer att funktionsserien är likformigt konvergent på $[0,R]$ enligt Weierstrass M-sats

iii) Låt $s(x)$ beteckna det punktvisa gränsvärdet för $x \in [0,\infty)$ som vi vet existerar från i). Notera också att

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{x^2+k^2}\bigg|_{x=n} \geq n \cdot \frac{n}{(2n)^2+(2n)^2} = \frac{1}{8} \quad \text{för } n=1,2,\dots$$

då

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{x^2+k^2} = \frac{1}{(x^2+k^2)^2}\cdot(k^2-x^2) \le 0 \quad \text{för } x \ge k$$

Alltså gäller $|s(n)-s_n(n)| \geq \frac{1}{8}$ för alla n

där $s_n(x)$ betecknar den n:te partialsumman av funktionsserien. Alltså gäller $\sup_{x\in[0,\infty)} |s(x)-s_n(x)| \not\to 0$, $n \to \infty$

Slutsats: Funktionsserien ej likf. konv. på $[0,\infty)$.

⑦ & ⑧ se kursboken