Lösningsförslag till TMA976 från den 22/4 2014

① Lös $x(1-x)y' - y = \frac{x}{1-x}$, $x \in (0,1)$, samt visa att varje lösning har exakt ett minimum i $(0,1)$.

Lösning: Omskrivning av diff ekv

(*) $$y' + \frac{1}{x(x-1)}\,y = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (0,1).$$

Detta är en första ordn diff och löses m.hj.a. integrerande faktor. Sätt $g(x) = \frac{1}{x(x-1)}$. Multiplicera (*) med $e^{G(x)}$ där $G(x)$ är en primitiv funktion till $g(x)$

$$G(x) = \int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)dx = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right), \quad x \in (0,1)$$

Vi får $\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x}{x}\,y(x)\right) = \frac{1}{x(1-x)}$ och alltså

$$y(x) = \frac{x}{1-x}\left(\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + C\right), \quad x \in (0,1), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Fixera $C \in \mathbb{R}$. Ska visa att $y(x)$ har exakt ett min i $(0,1)$. Då $\frac{x}{1-x}$ strängt växande på $(0,1)$, $\lim_{x\to 0+} \frac{x}{1-x} = 0$ och $\lim_{x \to 1-} \frac{x}{1-x} = \infty$ kan vi sätta $z = \frac{x}{1-x}$ och visa att $h(z) = z(\ln z + C)$ har exakt ett min för $z \in (0,\infty)$. Vi noterar att $h'(z) = \ln z + C + 1$ och $h''(z) = \frac{1}{z} > 0$ för $z \in (0,\infty)$. Alltså har $h(z)$ exakt ett min för $z \in (0,\infty)$

Svar: $y(x) = \frac{x}{1-x}\left(\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + C\right)$, $C \in \mathbb{R}$

② Avgör om gränsvärdet

$$\lim_{(x,y,z) \to (0,0,0)} \frac{x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz}{2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy}$$

existerar

Lösning: Sätt $f(x,y,z) = \frac{x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz}{2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy}$

Vi noterar att $f(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + (y-z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + (x-y)^2}$ och alltså $D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Vidare

$f(t,0,0) = \frac{1}{2}$ för $t \neq 0$ och

$f(t,t,t) = 1$ för $t \neq 0$ vilket ger att gränsvärdet inte existerar. Svar $\nexists$

(3) Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$ för $a>0$.

Lösning: Vi har

$$(a+x)^x - a^x = a^x\left(\left(1+\frac{x}{a}\right)^x - 1\right) = a^x\left(e^{x\ln(1+\frac{x}{a})} - 1\right) =$$
$$= \{\ln(1+t) = t + O(t^2),\ t\to 0\} =$$
$$= a^x\left(e^{\frac{x^2}{a}+O(x^3)} - 1\right) = \{e^t = 1+t+O(t^2),\ t\to 0\} =$$
$$= a^x\cdot\left(\frac{x^2}{a} + O(x^3)\right).$$

Detta ger

$$\frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} = a^x\cdot\left(\frac{1}{a}+O(x)\right) = e^{x\ln a}\cdot\left(\frac{1}{a}+O(x)\right) \to \frac{1}{a},\ x\to 0.$$

Svar: $\frac{1}{a}$

(4) Avgör för vilka $x\in\mathbb{R}$ som serien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+k^2}{2^k\cdot k!}x^k$ är absolutkonvergent / betingad konvergent / divergent samt beräkna seriens summa

Lösning: Sätt $a_k = \frac{1+k^2}{2^k\cdot k!}$ $k=0,1,\ldots$

Det gäller att $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1+(k+1)^2}{1+k^2}\cdot\frac{1}{2\cdot(k+1)} \to 0,\ k\to\infty$

Kvotkriteriet för potensserier ger att konvergensradien $R=\infty$ och potensserien är absolutkonvergent för alla $x\in\mathbb{R}$.

För att beräkna seriens summa kan vi göra omskrivningen $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1+k^2}{2^k\cdot k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k$

Sätt $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k$, $x\in\mathbb{R}$. Vi noterar att $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ och att vi kan derivera termvis för alla $x\in\mathbb{R}$.

Vi får $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}$ och $x f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k$

Den senare potensserien har samma konvergensradie som den ursprungliga och kan alltså deriveras termvis. Vi får

$$(xf'(x))' = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}$$

och följdaktligen $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k = x(x\cdot f'(x))' = \ldots =$
$$= e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)$$

Svar: Serien är absolutkonvergent för alla $x\in\mathbb{R}$ med summan $e^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)$.

⑤ a) Avgör om $\lim_{n\to\infty} a_n$ existerar då

$$a_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}} + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+2}} + \dots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}}, \quad n=1,2,\dots$$

Lösning: Vi observerar att

$$n \cdot \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}} \le a_n \le n \cdot \frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}} \qquad n=1,2,\dots$$

samt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n^6+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^5}}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n^6+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^6}}} = 1$$

Instängningsregeln ger $\lim_{n\to\infty} a_n$ existerar och $=1$

b) Sätt $f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx}}$, $x\in[0,2]$, $n=1,2,\dots$

Visa att $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar punktvis på $[0,2]$ men inte likformigt på $[0,2]$

Lösning: $f_n(0) = 0 \to 0$, $n\to\infty$ och

$f_n(x)\to 0$, $n\to\infty$ för $x\in(0,2]$ eftersom

$\frac{y}{e^y}\to 0$ då $y\to\infty$

$f_n \to 0$ punktvis på $[0,2]$.

Återstår att visa att $f_n \not\to 0$ likf på $[0,2]$,

dvs; ska visa att $\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x)-0| \not\to 0$, $n\to\infty$

Notera att

$$f_n'(x) = \frac{1}{e^{nx}}\left[n - n^2x\right] = 0 \text{ omm } x = \frac{1}{n}.$$

och $\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x)-0| \ge f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{e} \not\to 0$, $n\to\infty$.

Alltså gäller $f_n \not\to 0$ likf på $[0,2]$.

Svar: a) följden a_n konvergerar mot 1, b) —

⑥ Avgör om $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^2}\cos\left(\frac{\pi k^2}{k+1}\right)$ konvergerar

Lösning. Vi observerar att

$$\cos\left(\frac{\pi k^2}{k+1}\right) = \cos\left(\pi \frac{k^2+k-(k+1)+1}{k+1}\right) = \cos\left((k-1)\pi + \frac{\pi}{k+1}\right) =$$

$$= (-1)^{k-1}\cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right).$$

Vidare gäller $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2}\cdot\cos(\theta t)$ där $\theta\in[0,1]$

Här gäller

- $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(\ln k)^2}$ konvergerar enligt Leibniz konv. krit.

  då $a_k \equiv \frac{1}{(\ln k)^2} \downarrow 0$, $k \to \infty$

- $\sum_{k=2}^{\infty} \left| (-1)^{k-1} \frac{1}{(\ln k)^2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{k+1}\right)^2 \cos(\theta(k) \cdot \frac{\pi}{k+1}) \right| \leq$

  $\leq \frac{\pi^2}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 (\ln k)^2}$ konvergerar enligt jämförelsekrit

  (jämför med t.ex. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$).

Då konvergerar också $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(\ln k)^2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{k+1}\right)^2 \cos(\theta(k) \frac{\pi}{k+1})$

och $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(\ln k)^2} \cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)$ konvergerar ty serien

är summan av två konvergenta serier.

(7) (8) se textboken

((8) är en variant av Weierstrass M-sats)