Lösningsskisser till tentamen TMA976 den 21/8 2014

1. Lös $y''' + 4y'' + 5y' = x(1+e^{-x})$

Lösning: Kar. pol. $r^3+4r^2+5r = r((r+2)^2+1) =$

$= (r-0)(r+2+i)(r+2-i)$ ger homogenlösningen

$y_h(x) = A + Be^{-2x}\cos x + Ce^{-2x}\sin x$.

Ansätt $y_p(x) = ax^2 + bx + c(x)e^{-x}$. Vi får

$4\cdot 2a + 5\cdot(2ax+b) = x$ dvs $a = \frac{1}{10}$, $b = -\frac{4}{25}$

$((D-1)^3 + 4(D-1)^2 + 5(D-1))[c(x)] = x$

dvs $(D^3+D^2-2)[c(x)] = x$, dvs $c(x) = -\frac{1}{2}x$

Svar: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A + Be^{-2x}\cos x + Ce^{-2x}\sin x + \frac{x^2}{10} - \frac{4x}{25} - \frac{1}{2}xe^{-x}$

2. Beräkna $\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{\ln x}$ då $(x^2+x)y' + y - x = 1$

Lösning: För $x \neq 0, -1$ gäller

$y' + \frac{1}{x(x+1)}y = \frac{1}{x}$ ... (*)

Integrerande faktor: $\int \frac{1}{x(x+1)}dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}\,dx =$

$= A\ln|x| + B\ln|x+1|$ där $A = 1$, $B = -1$.

ger int. fakt $e^{\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|} = \left|\frac{x}{x+1}\right| = \frac{x}{x+1}$ för $x>0$

Multiplicera (*) med $\frac{x}{x+1}$. Vi får

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}y(x)\right) = \frac{1}{x+1}$

dvs $y(x) = \frac{x+1}{x}\left(\ln|x+1| + C\right)$ $C \in \mathbb{R}$

Detta ger $\frac{y(x)}{\ln x} \to 1$, $x\to\infty$

Svar: 1

3. Beräkna $\lim_{x\to\infty} e^x(\ln(1+e^x) - x)$

Lösning: $e^x(\ln(1+e^x) - x) = e^x(\ln e^x + \ln(1+e^{-x}) - x) =$

$= e^x \ln(1+e^{-x}) = \{\ln(1+t) = t + O(t^2),\ t\to 0\} =$

$= e^x\cdot(e^{-x} + O((e^{-x})^2)) = 1 + O(e^{-x}) \to 1$, $x\to\infty$

Svar: 1

4. Bestäm konvergensen för $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k^2}}{k^{k^2+2}}\, x^k$

Lösning: Sätt $a_k = \dfrac{(k+1)^{k^2}}{k^{k^2+2}}$ $\quad k = 1, 2, \ldots$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \to e, \quad k \to \infty.$$

Detta ger konvergensradien $R = \frac{1}{e}$.

Potensserien är absolutkonvergent för $|x| < \frac{1}{e}$ och divergent för $|x| > \frac{1}{e}$.

$x = \frac{1}{e}$: $\quad a_k\left(\frac{1}{e}\right)^k = e^{-k + k^2\ln(k+1) - (k^2+2)\ln k}$

Vi har $-k + k^2\ln(k+1) - (k^2+2)\ln k =$

$$= -k + (k^2 - (k^2+2))\ln k + k^2 \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) =$$

$$= -k - 2\ln k + k^2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) =$$

$$= -2\ln k - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

vilket ger $a_k\left(\frac{1}{e}\right)^k = \dfrac{1}{k^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{e}} \cdot e^{O\left(\frac{1}{k}\right)}, \quad k \to \infty$

Då $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergerar får vi att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\frac{1}{e}\right)^k$ konvergerar

$x = -\frac{1}{e}$: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(-\frac{1}{e}\right)^k$ absolutkonvergent enligt $x = \frac{1}{e}$-fallet

<u>Svar:</u> absolutkonvergens för $|x| \le \frac{1}{e}$, divergens för övrigt

5. Bestäm de $a \in \mathbb{R}$ för vilka $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \cdot n\ln n}$ konvergerar

Lösning: Då $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ divergerar följer att serien ovan inte kan konvergera för $a > 1$. Antag $a \le 1$. Då $f(x) = \frac{1}{x^a}$ avtagande funktion på $[1, \infty)$ får uppskattningen

$$\int_1^n \frac{1}{x^a}\,dx \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \le \int_1^n \frac{1}{x^a}\,dx + 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Då
$$\int_1^n \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} [\ln x]_1^n = \ln n & a = 1 \\ \left[\frac{1}{1-a} x^{1-a}\right]_1^n = \frac{1}{1-a}(n^{1-a} - 1) & a < 1 \end{cases}$$

följer att $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \cdot n\ln n}$ konvergerar omm $a \le 1$

då $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ konvergerar omm $p > 1$ och

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerar omm $p > 1$

<u>Svar:</u> $a \le 1$

6. Beräkna $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} \frac{n\sin(nx)}{1+x^2}\,dx$

Lösning: Partialintegration ger

$$\int_0^\infty \frac{n\sin nx}{1+x^2}\,dx = \left[-\frac{\cos nx}{1+x^2}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \cos(nx)\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= 1 - \left\{ \left[\frac{\sin(nx)}{n}\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\sin(nx)}{n}\cdot\left(\frac{2}{(1+x^2)^2} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - 2x\cdot\frac{2\cdot 2x}{(1+x^2)^3}\right)dx\right\} = 1 + \frac{1}{n}\int_0^\infty \sin(nx)\cdot\frac{2-5x^2}{(1+x^2)^3}\,dx$$

Här gäller $\int_0^\infty \left|\sin(nx)\frac{2-5x^2}{(1+x^2)^3}\right|dx \le \int_0^\infty \frac{5(1+x^2)}{(1+x^2)^3}\,dx \le$

$\le 5\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{5\pi}{2} < \infty$

Låt $n \to \infty$. Vi får $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n\sin(nx)}{1+x^2}\,dx = 1$.

<u>Svar</u>: 1

7. Se dina föreläsningsanteckningar

8. Antag $(\alpha_k)_{k=1}^\infty$ avtagande talföljd med $\alpha_k \to 0$, $k \to \infty$ och $(a_k)_{k=1}^\infty$ följd av tal sådana att

$|a_1 + \ldots + a_n| < M$ för alla $n = 1, 2, \ldots$ för något $M \in \mathbb{R}$

Visa $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k a_k$ konvergerar

Lösning: Enligt givet tips, sätt $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n = 1, 2 \ldots$ Det gäller

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = \alpha_1 s_1 + \alpha_2(s_2 - s_1) + \ldots + \alpha_n(s_n - s_{n-1}) =$$

$$= s_1(\alpha_1 - \alpha_2) + s_2(\alpha_2 - \alpha_3) + \ldots + s_{n-1}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) + s_n\alpha_n$$

Här gäller $|s_n\alpha_n| < M\cdot\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$ och

$\alpha_k - \alpha_{k+1} \geq 0$ för $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Vi noterar att det räcker att visa att

$\sum_{k=1}^\infty |s_k(\alpha_k - \alpha_{k+1})|$ konvergerar

för att $\sum_{k=1}^\infty s_k(\alpha_k - \alpha_{k+1})$ ska konvergera

Men $\sum_{k=1}^n |s_k(\alpha_k - \alpha_{k+1})| \le M(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2 - \alpha_3 + \ldots + \alpha_n - \alpha_{n+1}) =$

$= M(\alpha_1 - \alpha_{n+1}) \le M\alpha_1$ för alla $n$. Alltså konvergerar $\sum_{k=1}^\infty |s_k(\alpha_k - \alpha_{k+1})|$ enligt huvudsatsen för positiva serier och resultatet följer.