Lösningsförslag till tentamen TMA 176, 2015-04-16

① Lös $y'' + 2y' + 2y = (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$

Lösning.

Differentialekvationen är linjär av 2:a ordn. med konstanta koefficienter.

Allmänna homogenlösningen $y_h(x)$:

Karakteristiska polynomet: $r^2 - 2r + 2 = (r-1)^2 + 1 =$
$= (r-1+i)(r-1-i)$. Detta ger

$y_h(x) = Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x$

En partikulärlösning $y_p(x)$: Ansätt $y(x) = z(x)e^{-x}$

Förskjutningsregeln ger $(D+i)(D-i)[z(x)] = x^2+2x+3$,

dvs $z'' + z = x^2 + 2x + 3$. Ansätt $z(x) = ax^2 + bx + c$.

Derivering och insättning ger $a=1$, $b=2$, $c=1$

Alltså $y_p(x) = e^{-x}(x^2+2x+1)e^{-x}$

Allmänna lösningen till $y'' + 2y' + 2y = (x^2+2x+3)e^{-x}$

ges av $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Svar: $y(x) = Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x + (x^2+2x+1)e^{-x}$

② Lös $(x^3 - x)y' = y - y^3$, $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Lösning.

Differentialekvationen är separabel och för $x \in (0,1)$ och $y \neq 0, \pm 1$ (som också är lösningar men ointressanta då de inte satisfierar $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$) gäller

$\frac{1}{y-y^3} y' = \frac{1}{x^3-x}$. Sätt $g(y) = \frac{1}{y-y^3}$ och $f(x) = \frac{1}{x^3-x}$. Vi beräknar primitiva funktioner $G(y)$ och $F(x)$ till $g(y)$ resp $f(x)$. Då

$$\frac{1}{y-y^3} = -\frac{1}{y(y-1)(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{2}\frac{1}{y-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{y+1}$$

får vi $G(y) = \ln y - \frac{1}{2}\ln(1-y^2) = \ln \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

för $0 < y < 1$ (observera $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$) och
$F(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ för $x \in (0,1)$.
Detta ger oss
$$\ln\left(\frac{y(x)}{\sqrt{1-(y(x))^2}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + \ln C \quad , C > 0$$
dvs
$$\frac{y(x)}{\sqrt{1-(y(x))^2}} = C\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad , y(x) > 0$$
Villkoret $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ bestämmer C. Vi får $C = \frac{1}{3}$
Återstår att lösa ut $y(x)$ som funktion av x
Vi får $y(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+8x^2}}$, $x \in (0,1)$.
Svar: $y(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+8x^2}}$, $x \in (0,1)$.

③ Beräkna $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^{x^x}-1}{x^{x^x-1}}$

Lösning:
$$x^{x^x} = e^{x^x \ln x} = e^{e^{x\ln x}\cdot \ln x}$$
Då $x\ln x \to 0$ då $x \to 0+$ följer $x^{x^x} \to 0$, $x \to 0+$
$$x^{x^x-1} = e^{(x^x-1)\ln x} = e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x}.$$
Vi har nu
$$(e^{x\ln x}-1)\ln x = (1 + x\ln x + O((x\ln x)^2) - 1)\ln x =$$
$$= x(\ln x)^2 + O(x^2(\ln x)^3) \to 0, \ x \to 0+$$
och alltså blir det sökta gränsvärdet -1.

Svar: -1

④ $a_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$
Bestäm konvergensradien för potensserien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$.
Lösning:
Vi börjar med att uppskatta a_k. Med fink enligt beviset av integralkriteriet får
$$\int_1^k \frac{dx}{x} \le a_k \le 1 + \int_1^k \frac{dx}{x} \qquad k = 1, 2, \dots$$
dvs
$$\ln k \le a_k \le 1 + \ln k \quad , k = 1, 2, \dots$$

Instängningsregeln för gränsvärden ger nu
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1.$$
Potensserien har alltså konvergensradien $R = \frac{1}{1} = 1$ och är absolutkonvergent för $|x|<1$ och divergent för $|x|>1$. För $x = \pm 1$ gäller att potensserien divergerar då $a_k \not\to 0$, $k \to \infty$.

Svar: Potensserien är absolutkonv. för $|x|<1$ och divergent för övrigt

(5) $x_n = \sqrt[p]{1+\sqrt[p]{1+\dots+\sqrt[p]{1}}}$ (n rötter) $n = 1, 2, \dots$

Avgör för vilka $p>1$ som talföljden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar.

Lösning: Vi noterar att $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ är en växande talföljd. Talföljden konvergerar då om $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uppåt begränsad. Det gäller
$$1 \le x_n = \sqrt[p]{1+x_{n-1}} \le \sqrt[p]{1+x_n} \le \sqrt[p]{2x_n} \quad n = 2, 3, \dots$$
Detta ger $x_n^{1-\frac{1}{p}} \le 2^{\frac{1}{p}}$ $n = 1, 2, \dots$ dvs
$$x_n \le 2^{\frac{1}{p-1}} \quad n = 1, 2, \dots$$
Alltså, talföljden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar för alla $p>1$.

Alt: Resultatet kan erhållas även via fixpunktssatsen. Sätt $f(x) = \sqrt[p]{1+x}$, $x \ge 1$. Vi observerar att
$$f'(x) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(1+x)^{1-\frac{1}{p}}}, \quad x \ge 1$$
och alltså $\sup_{x\ge 1} |f'(x)| \le \frac{1}{p} < 1$ då $p>1$. Vidare gäller
$$f : [1, R] \to [1, R] \quad \text{om} \quad \sqrt[p]{1+R} \le R.$$
Då $R - \sqrt[p]{1+R} \to \infty$, $R \to \infty$ gäller självklart att det finns dylikt R. Fixera detta. Fixpunktssatsen ger nu att följden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, där $x_1 = 1$ och $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1, 2, \dots$, konvergerar mot den entydigt bestämda fixpunkten till $f : [1, R]$.

(6) 1) Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} x^k(1-x)$ konvergerar punktvis men inte likformigt på $[0,1]$

2) Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x)$ konvergerar likformigt på $[0,1]$.

Lösning:

1) Sätt $f_k(x) = x^k(1-x)$, $x \in [0,1]$ och $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $x \in [0,1]$, $n = 1,2,\ldots$

Vi noterar att $f_k(1) = 0$ $k = 1,2\ldots$ och alltså:

$s_n(1) = 0 \to 0$, $n \to \infty$. För $x \in [0,1)$ gäller

$$s_n(x) = (1-x)\sum_{k=1}^{n} x^k = (1-x)\frac{x - x^{n+1}}{1-x} = x - x^{n+1} \to x, \; n \to \infty$$

Så att

$$s(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

Det gäller att $s_n \to s$ punktvis på $[0,1]$ och alltså konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ punktvis på $[0,1]$.

Vidare noterar vi att $s_n \not\to s$ likformigt på $[0,1]$ då $s_n \in C([0,1])$ $n = 1,2,\ldots$ men $s \notin C([0,1])$.

Alltså konvergerar inte $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ likformigt på $[0,1]$

2) Sätt $f_k(x) = (-1)^k x^k (1-x)$, $x \in [0,1]$ och $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ $x \in [0,1]$, $n = 1,2,\ldots$

Här gäller $s_n(1) = 0 \to 0$, $n \to \infty$ och för $x \in [0,1)$

$$s_n(x) = (1-x)\sum_{k=1}^{n} (-x)^k = (1-x)\frac{-x - (-x)^{n+1}}{1+x} \to x\,\frac{x-1}{1+x}, \; n \to \infty$$

Så att $s(x) = x\,\frac{x-1}{1+x}$, $x \in [0,1]$. Det gäller alltså $s_n \to s$ punktvis på $[0,1]$, dvs $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konv. punktvis på $[0,1]$ med den (punktvisa) gränsfunktionen $x\,\frac{x-1}{1+x}$. För att visa att konvergensen är likformig på $[0,1]$ betrakta

$$|s_n(x) - s(x)| = \frac{1-x}{1+x}\cdot x^{n+1}, \quad x \in [0,1].$$

Vi önskar visa att $\sup_{x \in [0,1]} |s_n(x) - s(x)| \to 0$, $n \to \infty$

Sätt $h(x) = \frac{1-x}{1+x}\cdot x^{n+1}$

$$h'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\left[\left((n+1)x^n-(n+2)x^{n+1}\right)(1+x) - (x^{n+1}-x^{n+2})\right] =$$
$$= \frac{1}{(1+x)^2}x^n\left[(n+1) + (n+1-(n+2)-1)x - (n+1)x^2\right] =$$
$$= -\frac{(n+1)}{(1+x)^2}\cdot x^n\left[x^2+\frac{2}{n+1}x-1\right].$$

För $x\in[0,1]$ gäller $h'(\tilde{x})=0$, $h'(x)>0$, $x\in[0,\tilde{x})$ och $h'(x)<0$, $x\in(\tilde{x},1]$ där $\tilde{x}=\sqrt{1+(\frac{1}{n+1})^2}-\frac{1}{n+1}=$
$= 1-\frac{1}{n+1}+O(\frac{1}{n^2})$, $n\to\infty$. Vi har nu

$$\sup_{x\in[0,1]}|s_n(x)-s(x)| = h(\tilde{x}) = \frac{\frac{1}{n+1}+O(\frac{1}{n^2})}{2+O(\frac{1}{n})}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}+O(\frac{1}{n^2})\right)^{n+1}$$

Vi får $h(\tilde{x})\to 0$, $n\to\infty$ och påståendet visat. ▨

(7) Se kursbok

(8) Antag $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ avtagande följd med $a_k\to 0$, $k\to\infty$

1) Visa att $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty}2^k a_{2^k}$ båda konvergerar eller båda divergerar

2) Visa $\sum_{k=1}^{\infty}\min(a_k,\frac{1}{k})$ divergerar om $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ divergerar

Lösning

1) Det gäller för $k=1,2,\dots$

$$2^k a_{2^{k+1}} \le \underbrace{a_{2^k}+a_{2^k+1}+\dots+a_{2^k+2^k-1}}_{2^k\text{ termer}} \le 2^k a_{2^k}$$

Alltså

$$\sum_{k=1}^{n}2^k a_{2^{k+1}} \le \sum_{l=2}^{2^{n+1}-1}a_l \le \sum_{k=1}^{n}2^k a_{2^k} \qquad n=1,2,\dots$$

Detta ger att $\sum_{l=1}^{\infty}a_l$ konvergerar om $\sum_{k=1}^{\infty}2^k a_{2^k}$ konvergerar enligt huvudsatsen för positiva serier. Vidare gäller från $\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}a_{2^{k+1}} \le 2\sum_{l=2}^{2^{n+1}-1}a_l$ att $\sum_{k=1}^{\infty}2^k a_{2^k}$ konvergerar om $\sum_{l=1}^{\infty}a_l$ konvergerar.

2) Sätt $b_k=\min(a_k,\frac{1}{k})$, $k=1,2\dots$ Då gäller att $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ är en avtagande följd med $b_k\to 0$, $k\to\infty$ eftersom $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ avtagande.

Då gäller $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ divergent omm $\sum_{k=1}^{\infty}2^k b_{2^k}$ divergerar

Enligt antagandet divergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Vi observerar att

$$2^k b_{2^k} = 2^k \min\left(a_{2^k}, \frac{1}{2^k}\right) = \min(2^k a_{2^k}, 1)$$

Om $2^k b_{2^k} = 1$ för oändligt många k divergerar $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k b_{2^k}$. Om $2^k b_{2^k} = 1$ för högst ändligt många k gäller $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k b_{2^k}$ divergerar omm $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ divergerar. Men $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ divergerar då $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar.

Påståendet visat $\boxed{K}$