Lösningsförslag till TMA976, den 12/1 2018.

① Lös $\begin{cases} y'' + y = \cos^2 x \cdot \sin x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

Lösning: Karakteristiska polynomet $r^2+1 = (r+i)(r-i)$ har nollställena $r_{1,2} = \pm i$. Vi får den allmänna homogena lösningen $y_h(x) = A\cos x + B\sin x$. Då

$$\cos^2 x \cdot \sin x = \frac{1}{2}\cos x \cdot \sin(2x) = \frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin x$$

kan vi få en partikulärlösning $y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x)$ där $y_{p,1}'' + y_{p,1} = \frac{1}{4}\sin(3x)$, $y_{p,2}'' + y_{p,2} = \frac{1}{4}\sin x$.

Ansättning $y_{p,1}(x) = a\cos(3x) + b\sin(3x)$ ger direkt $a = 0$, $b = -\frac{1}{32}$, dvs $y_{p,1}(x) = -\frac{1}{32}\sin(3x)$. För att bestämma en partikulärlösning $y_{p,2}$ betraktas $\tilde{y}'' + \tilde{y} = \frac{1}{4}e^{ix}$. Ansättning $\tilde{y}(x) = e^{ix} z(x)$ ger (med förskjutningsregeln) $z'' + 2iz' = \frac{1}{4}$. Här fås $z(x) = -\frac{i}{8}x$ och alltså $y_{p,2}(x) = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\cdot\left(-\frac{i}{8}\right)x\right) = -\frac{x}{8}\cos x$. Detta ger oss den allmänna lösningen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \left(A - \frac{x}{8}\right)\cos x + B\sin x - \frac{1}{32}\sin(3x)$$

Konstanterna A och B bestäms från villkoren

$$\begin{cases} 0 = y(0) = A \\ 0 = y'(0) = -\frac{1}{8} + B - \frac{3}{32} \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{7}{32} \end{cases}$$

Svar: $y(x) = -\frac{x}{8}\cos x + \frac{7}{32}\sin x - \frac{1}{32}\sin(3x)$

② Lös $y' + \cos^2 x\, y = 2\cos^2 x - 1 + \sin^2 x\, y$, $y(0) = 2$

Lösning: Omskrivning av diff-ekv ger $y' + \cos(2x)\cdot y = \cos(2x)$. Detta är en 1:a ordn. linjär diff-ekv som löses m.h.j.a. integrerande faktor. Då $\frac{1}{2}\sin(2x)$ är en primitiv funktion till $\cos(2x)$ fås

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)\cdot e^{\frac{1}{2}\sin(2x)}\right) = \cos(2x)\, e^{\frac{1}{2}\sin(2x)}.$$

Integration ger

$$y(x)\cdot e^{\frac{1}{2}\sin(2x)} = \int \cos(2x)\, e^{\frac{1}{2}\sin(2x)}\, dx = e^{\frac{1}{2}\sin(2x)} + C$$

Villkoret $y(0)=2$ ger $C=1$ och vi får

Svar: $y(x) = 1 + e^{-\frac{1}{2}\sin(2x)}$

(3) Beräkna $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$ för $a>0$.

Lösning: Med standardomskrivning och Taylorutvecklingen $e^t = 1+t+O(t^2)$, $t\to 0$ gäller

$$n(\sqrt[n]{a}-1) = n\left(e^{\frac{1}{n}\ln a}-1\right) = n\cdot\left(\tfrac{1}{n}\ln a + O(\tfrac{1}{n^2})\right) =$$

$$= \ln a + O(\tfrac{1}{n}) \to \ln a, \quad n\to\infty$$

Svar: $\ln a$

(4) Beräkna $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2^p+3^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}$ för $p>0$.

Lösning: Sätt $f(x)=x^p$, $x>0$. Vi noterar att $f(x)$ är en växande funktion då $p>0$ och alltså gäller $\int_1^n f(x) \le \sum\limits_{k=1}^{n} k^p \le \int_1^{n+1} f(x)\,dx$ dvs

$$\frac{1}{p+1}(n^{p+1}-1) \le \sum_{k=1}^{n} k^p \le \frac{1}{p+1}\left((n+1)^{p+1}-1\right)$$

Då

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}}\cdot\frac{1}{p+1}(n^{p+1}-1) = \frac{1}{p+1} \quad \text{och}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}}\cdot\frac{1}{p+1}\left((n+1)^{p+1}-1\right) = \frac{1}{p+1}$$

gäller

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}.$$

Svar: $\frac{1}{p+1}$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n\cdot n^{1+\frac{1}{n}}}\cdot x^{2n}$. Bestäm konvergensen för olika $x\in\mathbb{R}$

Lösning: Sätt $t=x^2$ och $a_n = \dfrac{1}{2^n\cdot n^{1+\frac{1}{n}}}$ $n=1,2,\dots$

Betrakta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n t^n$. Det gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}$$

Alltså gäller att $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ är absolutkonvergent för $|t|<2$ och divergent för $|t|>2$. Alltså

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^{1+\frac{1}{n}}} x^{2n}$ är absolutkonvergent för $|x|<\sqrt{2}$ och divergent för $|x|>\sqrt{2}$.

För $x = \pm\sqrt{2}$ gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^{1+\frac{1}{n}}} (\pm\sqrt{2})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \qquad (*)$$

Notera att

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerar
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n}\ln n}} = 1$

Jämförelsekriteriet på gränsvärdesform ger att $(*)$ divergerar.

<u>Svar</u>: Serien är absolutkonvergent för $|x|<\sqrt{2}$ och divergent för $|x|\geq\sqrt{2}$.

(6) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är den växande följden av alla rötter till $\tan x = x$ för $x>0$. Bestäm $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$

Lösning: Vi noterar att $a_n \in (n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2})$, $n=1,2,\ldots$

Alltså gäller speciellt att $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

Vidare gäller

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

för $\alpha,\beta \notin \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. För $\alpha \to \frac{\pi}{2}+n\pi$ och $\beta = a_n$ fås

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-a_n\right) = \frac{1}{\tan a_n}$$ och alltså

$$\lim_{n\to\infty} \tan\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-a_n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\tan a_n} = \{\tan a_n = a_n\} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0.$$

Då arctan-funktionen är kontinuerlig har vi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-a_n\right) = 0$$

och alltså

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n-\pi) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-a_n\right)-\left(\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi-a_{n+1}\right)\right)$$
$$= 0$$

Svar: π.

(7) se kursboken

(8) a) Antag $s_n \to s$, $\tilde{s}_n \to \tilde{s}$ likformigt på I

och att finns $M>0$ så att $\sup_{x\in I} |s(x)| \le M$,

$\sup_{x\in I} |\tilde{s}(x)| \le M$.

Visa att $s_n \cdot \tilde{s}_n \longrightarrow s\cdot\tilde{s}$ likformigt på I

Bevis: Fixera $\varepsilon > 0$. Vi noterar att

$$|s_n(x)\cdot\tilde{s}_n(x) - s(x)\cdot\tilde{s}(x)| \le |s_n(x)-s(x)||\tilde{s}_n(x)| +$$

$$+ |s(x)|\cdot|\tilde{s}_n(x)-\tilde{s}(x)| \le$$

$$\le M|s_n(x)-s(x)| + M\cdot|\tilde{s}_n(x)-\tilde{s}(x)|.$$

$s_n \to s$ likformigt på I medför att det finns N_1 sådant att

$$\sup_{x\in I} |s_n(x)-s(x)| < \frac{1}{2M}\varepsilon \qquad \text{alla } n \ge N_1$$

$\tilde{s}_n \to \tilde{s}$ likformigt på I medför att det finns N_2 sådant att

$$\sup_{x\in I} |\tilde{s}_n(x)-\tilde{s}(x)| < \frac{1}{2M}\varepsilon \qquad \text{alla } n \ge N_2$$

Sätt $N = \max\{N_1, N_2\}$. Då gäller

$$\sup_{x\in I} |s_n(x)\cdot\tilde{s}_n(x) - s(x)\cdot\tilde{s}(x)| \le$$

$$\le M \sup_{x\in I}|s_n(x)-s(x)| + M \sup_{x\in I}|\tilde{s}_n(x) - \tilde{s}(x)| <$$

$$< M\cdot\frac{1}{2M}\varepsilon + M\cdot\frac{1}{2M}\varepsilon = \varepsilon \qquad \text{för alla } n \ge N.$$

Alltså $s_n\tilde{s}_n \longrightarrow s\cdot\tilde{s}$ likf. på I.

b) $I = (0,\infty)$, $s_n(x) = \frac{1}{n\cdot\sqrt{x}}$, $\tilde{s}_n(x) = nx\cdot e^{-nx}$

för $x\in I$, $n = 1, 2, \ldots$. Visa att

1) $s_n \to s$, $\tilde{s}_n \to \tilde{s}$ punktvis på I men inte likformigt på I

2) $s_n\tilde{s}_n \to s\cdot\tilde{s}$ likformigt på I

Lösning: Det gäller att

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0 = \lim_{n\to\infty}\tilde{s}_n(x) \qquad x\in I$$

och alltså $s = \tilde{s} = 0$.

Notera att $s_n(\frac{1}{n^2}) = 1 \not\to 0$, $n \to \infty$ och

$\tilde{s}_n(\frac{1}{n}) = e^{-1} \not\to 0$, $n \to \infty$. Alltså gäller

$$\sup_{x\in I} |s_n(x) - s(x)| \geq 1 \not\to 0 \quad n \to \infty$$

$$\sup_{x\in I} |\tilde{s}_n(x) - \tilde{s}(x)| \geq \frac{1}{e} \not\to 0 \quad n \to \infty$$

Påståendena i 1) visade.

2) Återstår att visa att $s_n\tilde{s}_n \to$ 0-funktionen

likformigt på I.

$$s_n(x) \cdot \tilde{s}_n(x) = \sqrt{x}\, e^{-nx}, \quad x > 0$$

Derivering ger

$$\frac{d}{dx}(s_n(x) \cdot \tilde{s}_n(x)) = e^{-nx}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} - n\sqrt{x}\right], \quad x > 0$$

Teckenstudium visar att

$$0 \leq s_n(x) \cdot \tilde{s}_n(x) \leq s_n\left(\frac{1}{2n}\right)\tilde{s}_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2en}} \to 0, \quad n \to \infty$$

Alltså $\sup_{x\in I} |s_n(x) \cdot \tilde{s}_n(x) - s(x)\tilde{s}(x)| \to 0$, $n \to \infty$

Påståendet i 2) visat. $\boxtimes$