Lösningsförslag till TMA976 den 5/4 2018

① Lös

$$\begin{cases} y''' + y = \cos^2 x & \quad (*) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0 & \quad (**) \end{cases}$$

Lösning:

Karakteristiska polynomet $r^3 + 1 = (r+1)(r^2 - r + 1) =$

$$= (r+1)\left(\left(r-\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = (r+1)\left(r - \tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(r - \tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

har nollställena $r_1 = -1$, $r_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vi har den allmänna homogenlösningen

$$y_h(x) = Ae^{-x} + Be^{\frac{x}{2}}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Ce^{\frac{x}{2}}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Högerledet $\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$ medför att

$y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x)$ där

$$y_{p,1}''' + y_{p,1} = \tfrac{1}{2} \quad \text{och} \quad y_{p,2}''' + y_{p,2} = \tfrac{1}{2}\cos(2x).$$

Här fås att $y_{p,1}(x) = \frac{1}{2}$ (t.ex) och vi ansätter

$$y_{p,2}(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x).$$

Derivering och insättning i diff-ekv ger

$$8a\sin(2x) - 8b\cos(2x) + a\cos(2x) + b\sin(2x) = \tfrac{1}{2}\cos(2x)$$

dvs

$$\begin{cases} 8a + b = 0 \\ -8b + a = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{130} \\ b = -\frac{4}{65} \end{cases}$$

Den allmänna lösningen till $(*)$ ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) = Ae^{-x} + Be^{\frac{x}{2}}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Ce^{\frac{x}{2}}\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \tfrac{1}{2} +$$

$$+ \tfrac{1}{130}\cos(2x) - \tfrac{4}{65}\sin(2x).$$

Villkoren $(**)$ bestämmer A, B och C. Vi har

$$\begin{cases} A + B + \frac{1}{2} + \frac{1}{130} = 0 \\ -A + \frac{1}{2}B + \frac{\sqrt{3}}{2}C - \frac{8}{65} = 0 \\ A + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)B + 2\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}C - \frac{4}{130} = 0 \end{cases}$$

Detta ger

$$\begin{cases} A + B = -\frac{33}{65} \\ A - \frac{1}{2}B - \frac{\sqrt{3}}{2}C = -\frac{8}{65} \\ A - \frac{1}{2}B + \frac{\sqrt{3}}{2}C = \frac{2}{65} \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} A = -\frac{13}{65} \\ B = -\frac{4}{13} \\ C = \frac{2}{13\sqrt{3}} \end{cases}$$

Svar: $y(x) = -\frac{13}{65}e^{-x} - \frac{4}{13}e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{2}{13\sqrt{3}}e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{2} +$

$+ \frac{1}{130}\cos(2x) - \frac{4}{65}\sin(2x)$.

② Lös $\begin{cases} y' = \frac{1}{x^x} - y\ln x = 0, \quad x>0 \\ y(e) = 1 \end{cases}$

Lösning: Differentialekvationen är linjär av 1:a ordn.

Då $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$

är $e^{x\ln x - x} = \left(\frac{x}{e}\right)^x$ en integrerande faktor

Vi får

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{x}{e}\right)^x \cdot y(x)\right) = e^{-x}$$

och alltså

$$y(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^x\left(-e^{-x} + C\right) = -\frac{1}{x^x} + C\left(\frac{e}{x}\right)^x.$$

Villkoret $y(e) = 1$ ger $1 = -\frac{1}{e^e} + C$

Svar: $y(x) = \frac{1}{x^x}\left(\left(1+\frac{1}{e^e}\right)e^x - 1\right)$

③ Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

Lösning: Ett fall för Taylor. Vi gör omskrivningen

$$(\cos x)^{\sin x} = e^{\sin x\cdot\ln(\cos x)}$$

och noterar standardutvecklingarna

$\sin x = x + O(x^3)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$

$\ln(1+t) = t + O(t^2) \quad t\to 0$

Alltså gäller

$$\sin x\cdot\ln(\cos x) = (x+O(x^3))\cdot\ln\left(1+\left(-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)\right) =$$

$$= (x+O(x^3))\cdot\left(-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right) = -\frac{1}{2}x^3 + O(x^5).$$

standardutvecklingen $e^t = 1+t+O(t^2)$, $t\to 0$ ger slutligen att

$$\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \frac{1}{x^3}\left(1-\left(1-\tfrac{1}{2}x^3+\mathcal{O}(x^5)\right)\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2} + \mathcal{O}(x^2) \to \tfrac{1}{2},\ x \to 0$$

Svar: $\frac{1}{2}$

(4) Avgör om serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar där

$a_n = \frac{1}{n^2}$ om n inte är en jämn kvadrat och

$a_n = \frac{1}{n}$ annars.

Lösning: Serien är en positiv serie och

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m^2 \text{ alla} \\ m \text{ pos. heltal}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}.$$

Serien $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergent (välkänt) och

alltså konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ enligt huvudsatsen

för positiva serier.

Svar: serien konvergerar

(5) Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n}}-1)x^n$

är absolutkonvergent, betingat konvergent resp divergent

Lösning: Omskrivningen $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$ ger med

standardutvecklingen $e^t = 1+t+\mathcal{O}(t^2)$, $t \to 0$ att

$$n^{\frac{1}{n}}-1 = \tfrac{1}{n}\ln n\left(1+\mathcal{O}\left(\tfrac{1}{n}\ln n\right)\right),\quad n\to\infty,$$

där vi observerat att $\frac{1}{n}\ln n \to 0$, $n\to\infty$.

Detta ger att

$$\sqrt[n]{|n^{\frac{1}{n}}-1|} = \underbrace{\left(\tfrac{1}{n}\ln n\right)^{\frac{1}{n}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\left|1+\mathcal{O}\left(\tfrac{1}{n}\ln n\right)\right|\right)^{\frac{1}{n}}}_{\to 1} \to 1,\ n\to\infty.$$

Potensserien $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n}}-1)x^n$ har konvergensradien

$R=1$ och är absolutkonvergent för $|x|<1$ och

divergent för $|x|>1$. Återstår att studera

fallen $x=\pm 1$.

Vi noterar att $\frac{1}{n}\ln n \downarrow 0$, $n \to \infty$ eftersom

med $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ gäller $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ för

$x > e$. Då e^x är en strängt växande funktion för $x \in \mathbb{R}$

gäller $n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln n} - 1 \downarrow 0$, $n \to \infty$.

$x = 1$: Då $n^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{\ln n}{n}\left(1 + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)$ där $\frac{\ln n}{n} \to 0$,

$n \to \infty$, och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerar gäller att

$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1)$ divergerar enligt jämförelsekriteriet

$x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1)(-1)^n$ konvergerar enligt Leibniz

konvergenskriterium eftersom $n^{\frac{1}{n}} - 1 \downarrow 0$. Men

serien är inte absolutkonvergent då fallet

$\sum_{n=1}^{\infty} |(n^{\frac{1}{n}} - 1)(-1)^n| = \sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1)$ som var divergent

enligt ovan

Svar: Serien är absolutkonvergent för $|x| < 1$, betingat

konvergent för $x = -1$ och divergent för övrigt.

(6) $f_n(x) = \ln\left(\frac{nx}{n+1}\right)$, $x > 0$, $n = 1, 2, \ldots$

$g_n(x) = e^{f_n(x)}$, $x > 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Avgör om f_n och/eller g_n är likformigt konvergent

på $(0, \infty)$.

Lösning: För varje $x > 0$ gäller

$f_n(x) \to \ln x$, $n \to \infty$. Alltså

$f_n \to \ln x$ punktvis på $(0, \infty)$.

Det gäller även att

$g_n(x) \to e^{\ln x} = x$, $n \to \infty$ alla $x > 0$.

Alltså

$g_n \to x$ punktvis på $(0, \infty)$.

Vidare gäller

$|f_n(x) - \ln x| = |\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)| = |\ln(1 - \frac{1}{n+1})|$

$\leq \frac{1}{n+1}$ då $\ln(1+x) \leq x$ alla $x > -1$.

Alltså $\sup_{x\in(0,\infty)} |f_n(x) - \ln x| \to 0$, $n \to \infty$ och

$f_n \to \ln x$ likformigt på $(0,\infty)$.

Slutligen gäller

$$|g_n(x) - x| = \left|\frac{nx}{n+1} - x\right| = |x|\cdot\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = |x|\cdot\frac{1}{n+1}.$$

Alltså gäller

$$|g_n(n+1) - (n+1)| = 1 \not\to 0, \quad n \to \infty$$

dvs $\sup_{x\in(0,\infty)} |g_n(x) - x| \not\to 0$, $n \to \infty$.

$g_n \not\to x$ likformigt på $(0,\infty)$.

Svar: f_n konvergerar likformigt på $(0,\infty)$

g_n konvergerar inte likformigt på $(0,\infty)$

(7) Se kurslitteraturen

(8) Antag $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en kontraktion på $\mathbb{R}$. Visa att

1) f har en entydigt bestämd fixpunkt $\alpha \in \mathbb{R}$

2) För varje $x_0 \in \mathbb{R}$ gäller $x_n \to \alpha$, $n \to \infty$ där

$x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$

Bevis: Enligt antagandet finns $c < 1$ sådant att

$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq c|x - \tilde{x}|$ alla $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$.

Speciellt följer att f är en kontinuerlig funktion och

$x \geq 0$: $x - f(x) = x - f(0) - f(x) + f(0) \geq x - f(0) - |f(x) - f(0)| \geq$

$\geq x - f(0) - c|x| \geq (1-c)x - f(0) \to +\infty$, $x \to \infty$

$x \leq 0$: $x - f(x) = x - f(0) - f(x) + f(0) \leq x - f(0) + |f(x) - f(0)| \leq$

$\leq x - f(0) + c|x| = (1-c)x - f(0) \to -\infty$, $x \to -\infty$.

Alltså finns $R > 0$ sådant att

$R - f(R) > 0$, $-R - f(-R) < 0$

och då $h(x) = x - f(x)$ är kontinuerlig finns $x \in (-R, R)$

sådant att $h(\alpha) = 0$, dvs $f(\alpha) = \alpha$, enligt satsen om mellanliggande värden för kontinuerliga funktioner. Existensen av fixpunkt visad.

Entydigheten visas av att

$\alpha = f(\alpha)$, $\tilde{\alpha} = f(\tilde{\alpha})$ medför

$|\alpha - \tilde{\alpha}| = |f(\alpha) - f(\tilde{\alpha})| \leq c|\alpha - \tilde{\alpha}|$, dvs $|\alpha - \tilde{\alpha}| = 0$.

Alltså $\alpha = \tilde{\alpha}$.

1) är visad.

2) visas av

$$|x_{n+1} - \alpha| = |f(x_n) - f(\alpha)| \leq c|x_n - \alpha| \leq \ldots \leq c^{n+1}|x_0 - \alpha|.$$

Här gäller $c^{n+1} \to 0$, $n \to \infty$ då $c \in [0,1)$.

2) visad. $\blacksquare$