Lösningsförslag till TMA976, den 23/8 2018

1

$$\begin{cases} y^{(4)} - y = 0 \\ y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0, \; y''(0) = 1 \end{cases}$$

Lösning: Karakteristiska polynomet är

$$r^4 - 1 = (r^2-1)(r^2+1) = (r-1)(r+1)(r-i)(r+i)$$

varför $y(x) = Ae^x + Be^{-x} + C\cos x + D\sin x$.

Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B + D = 0 \\ A - B - D = 0 \\ A + B - C = 1 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \\ C = -\frac{1}{2} \\ D = 0 \end{cases}$$

Svar: $y(x) = \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x$

2 $xy' + \frac{1}{2}y = y^2, \; x > 0$

Lösning: Separabel diff-ekv

$$y' = y(y - \tfrac{1}{2}) \cdot \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

För $y \neq 0, \frac{1}{2}$ gäller

$$\frac{1}{y(y-\frac{1}{2})} \cdot y' = \frac{1}{x}$$

Vi har

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x, \quad x > 0$$

$$\int \frac{1}{y(y-\frac{1}{2})}\,dy = \int \left(-\frac{2}{y} + \frac{2}{y-\frac{1}{2}}\right)dy = -2\ln|y| + 2\ln|y-\tfrac{1}{2}| =$$

$$= \ln\left(\frac{y-\frac{1}{2}}{y}\right)^2$$

Detta ger $\ln\left(\frac{y-\frac{1}{2}}{y}\right)^2 = \ln x + C, \; C \in \mathbb{R}$

Med $C = \ln C', \; C' > 0$ fås

$$\left(\frac{y-\frac{1}{2}}{y}\right)^2 = C'x$$

dvs $y(x) = \dfrac{1}{2 - \tilde{C}\sqrt{x}}$ $\quad \tilde{C} \neq 0$

Vidare är $y(x) = 0$ och $y(x) = \frac{1}{2}$ lösningar

Svar: $y(x) = \dfrac{1}{2 - \tilde{C}\sqrt{x}}, \; \tilde{C} \in \mathbb{R}$ och $y(x) = 0$

③ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$

Lösning:

$$\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}=\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)}\equiv A$$

standardutvecklingarna

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+O(t^3)$$
$$\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}t+O(t^2) \qquad t\to 0$$

ger

$$A=\frac{\ln(1+x)-\ln(1+x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3))}{\ln(1+x+O(x^2))\ln(1+x)}=$$
$$=\frac{x-\frac{1}{2}x^2+O(x^3)-(x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2+O(x^3))}{(x+O(x^2))(x+O(x^2))}=$$
$$=\frac{-\frac{1}{2}x^2+O(x^3)}{x^2+O(x^3)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+O(x)}{1+O(x)}\to-\frac{1}{2},\ x\to 0.$$

Svar: $-\frac{1}{2}$

④ $a_1=a,\ a_2=b,\quad a_{n+2}+(p-1)a_{n+1}-pa_n=0,\ n=1,2,\dots$

Bestäm alla $a,b,p\in\mathbb{R}$ för vilka $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar.

Lösning: Karakteristiskt polynom för $p\neq 0$

$$r^2+(p-1)r-p=\left(r+\frac{p-1}{2}\right)^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-p=$$
$$=\left(r+\frac{p-1}{2}\right)^2-\left(\frac{p+1}{2}\right)^2=(r+p)(r-1)$$

Alltså gäller

$a_n=A(-p)^n+B \qquad n=1,2,\dots \qquad$ för $p\neq-1$

$a_n=A+Bn \qquad n=1,2,\dots \qquad$ för $p=-1$.

Fallet $p=-1$:

$$\begin{cases}A+B=a\\ A+2B=b\end{cases}\quad\text{ger}\quad\begin{cases}A=2a-b\\ B=b-a\end{cases}$$

Fallet $p\neq-1$:

$$\begin{cases}A\cdot(-p)+B=a\\ A\cdot p^2+B=b\end{cases}\quad\text{ger}\quad\begin{array}{l}A=\frac{1}{p}\left(\frac{pa+b}{p+1}-a\right)\\ B=\frac{pa+b}{p+1}\end{array}$$

Slutligen, då $p=0$ gäller $a_{n+1}=a_n \quad n=2,3,4,\dots$

Inspektion av fallen ger att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar

för $p=0$, $a,b\in\mathbb{R}$ godtyckliga, $p=-1$, $b=a$, $a\in\mathbb{R}$

godtyckligt, $p=1$, $b=a$, $a\in\mathbb{R}$ godtyckligt, $|p|<1$, $a,b\in\mathbb{R}$ godtyckliga och $|p|>1$, $b=a$, $a\in\mathbb{R}$ godtyckligt

Svar: Konvergens för $a=b$, $p\in\mathbb{R}$ och $|p|<1$, $a,b\in\mathbb{R}$.

(5) Bestäm de olika konvergens/divergensområdena för $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln(k+1))^2} x^k$

Lösning:

Sätt $a_k = \frac{1}{k(\ln(k+1))^2}$ $k=1,2,..$

Vi har $\lim_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = 1$ varför konvergensradien $R = \frac{1}{1} = 1$. Då $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln(k+1))^2}$ konvergerar, då vi vet att $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$ konv. omm $p>1$, har vi att potensserien är absolutkonvergent för $|x|\leq 1$ och divergent för $|x|>1$

Svar: Absolutkonvergent för $x\in[-1,1]$ och divergent för övrigt

(6) $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$, $g_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$ $x\in[0,\infty)$, $n=1,2,..$

Avgör likf. konv./punktvis konv./divergens på $[0,\infty)$ för $\sum f_n$, $\sum g_n$, $\sum f_n \cdot g_n$

Lösning: Sätt $a_n = \frac{1}{n^2}$ $n=1,2,..$

Det gäller att $|g_n(x)|\leq a_n$, $|f_n(x)\cdot g_n(x)|\leq a_n$ för alla $x\in[0,\infty)$ och $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar.

Alltså följer att $\sum g_n$, $\sum f_n \cdot g_n$ likformigt konvergenta på $[0,\infty)$ enligt Weierstrass M-sats.

Vi noterar att $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerar.

Alltså, $\sum f_n$ ej ens punktvis konvergent på $[0,\infty)$

[Uppenbart gäller att $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ divergerar för varje $x\geq 0$]

(7) Se BLW

(8) Antag f deriverbar på $[a,b)$, $a<b$ och $f'(a)\neq 0$. Låt för varje $x\in(a,b)$ $c(x)$ vara ett tal i intervallet (a,x) sådant att

$$\int_a^x f(t)\,dt = f(c(x))(x-a).$$

(Existensen av ett sådant $c(x)$ följer av medelvärdessatsen för integraler). Visa att $\lim\limits_{x\to a+}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{1}{2}$.

<u>Bevis:</u> Betrakta kvoten

$$A = \frac{\int_a^x f(t)\,dt - x f(a) + a f(a)}{(x-a)^2}, \quad a<x<b$$

Då gäller med beteckning enligt ovan att

$$A = \frac{(x-a)(f(c(x))-f(a))}{(x-a)^2} = \frac{f(c(x))-f(a)}{x-a} =$$

$$= \frac{c(x)-a}{x-a}\cdot\frac{f(c(x))-f(a)}{c(x)-a}$$

Här gäller $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(c(x))-f(a)}{c(x)-a} = f'(a)$

l'Hospital på A ger

$$\lim_{x\to a+} A = \lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{2(x-a)} = \frac{1}{2}f'(a).$$

Alltså, då $f'(a)\neq 0$, existerar $\lim\limits_{x\to a+}\frac{c(x)-a}{x-a}$ och $\lim\limits_{x\to a+}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{1}{2}$.