MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2011-12-12, TID(14.00-18.00)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Adam Andersson, 0703-088304.

Besökstider: ca 14.30 och 16.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differensekvationen

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = n2^n, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

(6p)

2. Beräkna $\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{\ln x}$ då funktionen $y(x)$ satisfierar differentialekvationen

$$(x^2 + x)y' = x - y + 1.$$

(6p)

3. (a) Bestäm $f^{(15)}(0)$ för $f(x) = (\sin x^3)^3$.

(4p)

(b) Antag att $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_9$ är reella tal sådana att $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = 0$. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} (a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + a_2\sqrt{n+2} \ldots + a_9\sqrt{n+9}).$$

(4p)

4. (a) Avgör om serien

$$\Sigma_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

konvergerar.

(4p)

(b) Bestäm konvergensintervallet för potensserien $\Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(\frac{\sqrt{n}}{n^2+1})x^n$.

(6p)

5. Talföljden $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definieras av

$$a_1 = -\frac{3}{2}, \ a_{n+1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}a_n^3, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Visa att talföljden är konvergent och beräkna dess gränsvärde.

(8p)

6. Sätt $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$, $g_n(x) = \frac{x}{nx+1}$ för $x \in (0,1)$ och $n = 1, 2, 3, \ldots$ Visa att

   (a) $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar punktvis på $(0,1)$ men inte likformigt på $(0,1)$ då $n \to \infty$ men att

   (b) $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på $(0,1)$ då $n \to \infty$.

(3+3p)

7. Formulera och bevisa integralkriteriet.

(8p)

8. Givet en talföljd $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ med positiva reella tal. Visa att

   (a) om $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = a \in \mathbb{R}$ så gäller $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = a$,

   (b) men om $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = a \in \mathbb{R}$ gäller så kan men inte dra slutsatsen $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = a$, t ex genom att betrakta följden

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & k = 2l-1, l = 1, 2, 3, \ldots \\ \\ \frac{2}{k} & k = 2l, l = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK