MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2012-04-10, TID(14.00-18.00)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Adam Andersson, 0703-088304.

Besökstider: ca 14.30 och 16.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen
$$y''' - y = 3xe^x.$$
(8p)

2. Lös för $x > 0$ differentialekvationen
$$x^2y'' - 2xy' + 2y = \frac{x}{1+x}.$$
(8p)

3. (a) Undersök om gränsvärdet
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - 2y^3}{2x^2 + y^2}$$
existerar. Beräkna det i så fall.
(3p)

   (b) Sätt $f(x) = x\ln(1 + \frac{1}{x})$. Visa att $f(x)$ är en växande funktion på $(0, \infty)$ samt beräkna $\lim_{x\to 0+} f(x)$ och $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
(3p)

4. (a) För vilka reella tal x och y konvergerar serien
$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{k^x}{\ln(1 + k^y)\ln(1 + k^{-y})}?$$
(6p)

   (b) För vilka reella tal x är serien
$$\Sigma_{k=2}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k\ln k}$$
absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent?
(6p)

5. Antag att serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent. Visa att funktionsserien $\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{a_k x^{2k}}{1+x^{2k}}$ är likformigt konvergent på $\mathbb{R}$.

(4p)

6. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{n\sin(\frac{2x}{n})}{x(1+x^2)}\, dx.$$

Motivera ordentligt!

(6p)

7. Formulera och bevisa Taylors formel med resttermen given på Lagranges form.

(8p)

8. Antag att $x(t), a(t)$ och $b(t)$ är kontinuerliga funktioner på intervallet $[0,1]$ och att $b(t) \geq 0$ för $t \in [0,1]$. Antag vidare att

$$(*) \qquad x(t) = a(t) + \int_0^t b(s)x(s)\, ds, \quad t \in [0,1].$$

Visa[1] att

$$x(t) = a(t) + \int_0^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(u)\, du}\, ds, \quad t \in [0,1].$$

Vad kan sägas om $(*)$ ersätts med $(**)$ där

$$(**) \qquad x(t) \leq a(t) + \int_0^t b(s)x(s)\, ds, \quad t \in [0,1]?$$

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

[1] Tips: Sätt $y(t) = \int_0^t b(s)x(s)\, ds$ och derivera $y(t)$.