MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2012-12-19, TID(8.30-12.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Dawan Mustafa, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen
$$y'' + y' - 2y = 1$$
som är 0 för $x = 0$ och som har ett gränsvärde då $x \to \infty$.

(5p)

2. Bestäm den lösningskurva $y = y(x)$ till differentialekvationen
$$(xy + y)y' = x^2y^2 + x^2$$
som går genom punkten $(1, 2)$ och som är definierad på ett så stort intervall som möjligt.

(7p)

3. (a) Taylorutveckla $\ln(\frac{\sin x}{x})$ kring 0 med restterm på formen $\mathcal{O}(x^8)$.

(4p)

(b) Beräkna
$$\lim_{x\to\infty} x \cdot (\frac{1}{e} - (\frac{x}{x+1})^x).$$

(4p)

4. (a) För vilka positiva tal a och b är serien
$$\Sigma_{k=0}^{\infty} a^{\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}+\ldots+\frac{1}{b+k}}$$
konvergent?

(6p)

(b) Beräkna
$$\Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{3^k(k+1)}{k!}.$$

(6p)

5. Visa att det finns ett entydigt bestämt tal $\alpha > 0$ sådant att talföljden

$$\sqrt{\alpha},\ \sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha}},\ \sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha}}},\ldots$$

konvergerar och har gränsvärdet α.

(6p)

6. Avgör om funktionsföljden $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$, där $s_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$, konvergerar likformigt på $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(6p)

7. Formulera och bevisa Taylors formel (kring $x = 0$) med restterm på Lagrangeform.

(8p)

8. Antag att $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ är en följd av kontinuerligt deriverbara funktioner på $[0, 1]$. Antag vidare att funktionsföljden konvergerar punktvis på $[0, 1]$ samt att

$$\max_{x\in[0,1]} |s_n'(x)| \leq 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Visa att funktionsföljden konvergerar likformigt på $[0, 1]$.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK