MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2013-04-02, TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jakob Hultgren, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen
$$y''' - y = 3xe^x.$$
(8p)

2. Lös differensekvationen
$$\begin{cases} y_{n+1} - y_n = \sin n, & n = 0, 1, 2, \ldots \\ y_0 = 0 \end{cases}$$
(6p)

3. (a) Sätt
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$
Avgör om gränsvärdet
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$
existerar och om så är fallet beräkna gränsvärdet.
(5p)

(b) Beräkna
$$\lim_{x\to\infty} [(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1}].$$
(5p)

4. (a) Avgör om serien
$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}}$$
konvergerar.
(4p)

(b) För vilka $x \in \mathbb{R}$ är serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}(x-1)^k \arctan(\frac{1}{k})$$

absolutkonvergent?

(6p)

5. För $a \in \mathbb{R}$ låt $\lfloor a \rfloor$ beteckna det största heltal n sådant att $n \leq a$. Beräkna

$$\int_0^1 2^{-\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}\, dx.$$

(6p)

6. För $x \in \mathbb{R}$ sätt

$$f_0(x) = \frac{1}{1+x^2},\ f_{n+1}(x) = 1 - \cos(f_n(x)),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Låt $s(x)$ beteckna summan av funktionsserien $\Sigma_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Avgör om $s(x)$ är en deriverbar funktion för alla $x \in \mathbb{R}$.

(7p)

7. Formulera och bevisa Taylors formel (kring $x = 0$) med restterm på Lagrangeform.

(8p)

8. Antag att $f : [0, 1] \to [0, 1]$ är en deriverbar funktion med

$$\sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| \equiv k < 1.$$

Fixera ett godtyckligt $x_0 \in [0, 1]$ och betrakta talföljden $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ där $x_{n+1} = f(x_n)$. Det gäller att f har en entydigt bestämd fixpunkt $a \in [0, 1]$ (behöver inte visas). Visa uppskattningarna

(a)

$$|x_{n+1} - a| \leq k^{n+1}|x_0 - a|$$

(b)

$$|x_{n+1} - a| \leq \frac{k^{n+1}}{1-k}|x_1 - x_0|$$

för $n = 1, 2, 3, \ldots$

(5p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK