

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2013-08-22, TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Jakob Hultgren, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y' - (1 - 2x)y + 2e^{-x-x^2} = 0$$

som har extremvärde för $x = 0$.

(6p)

2. Lös differentialekvationen

$$y^{(4)} + 2y'' + y = x \sin x.$$

(7p)

3. Bestäm nödvändiga och tillräckliga villkor på $a, b \in \mathbb{R}$ för att funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^a |y|^b}{x^2 - xy + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ska vara kontinuerlig i hela planet.

(5p)

4. Beräkna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

(6p)

5. (a) Avgör om serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln \ln k}}$$

är konvergent.

(6p)

- (b) Bestäm konvergensintervallet för

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}} x^k.$$

(6p)

- (c) Visa att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!} = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right).$$

(6p)

6. Visa att funktionsserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^k)}{x^k}$$

är likformigt konvergent för $x > a$ för varje $a > 1$.

(5p)

7. Formulera och bevisa integralkriteriet.

(8p)

8. Antag att $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ är en positiv avtagande följd. Visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}} = 1$$

om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar.

(5p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK