

## MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2013-12-18,  
TID(14.00-18.00)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Peter Kumlin, 3532

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

---

**OBS:** Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.  
Ange kod på *varje* inlämnat blad.  
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.  
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen

$$y'' + 4y = (1 + \sin x)^2. \quad (8p)$$

2. Funktionen  $y(x)$  uppfyller differentialekvationen

$$y' - ay = b, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 3,$$

där  $a, b \in \mathbb{R}$ . Bestäm  $y(3)$ . (6p)

3. (a) Taylorutveckla

$$\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{-1}$$

med restterm på formen  $\mathcal{O}(x^8)$ . (3p)

- (b) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - \left(\frac{1}{a}\right)^x}{x}$$

för  $a > 0$ . (5p)

4. (a) För vilka reella tal  $x$  är serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k k^{1+\frac{1}{k}} \ln k} x^k$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent? (6p)

- (b) Beräkna

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(k-1)! 3^k}.$$

(6p)

5. Avgör om följderna  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  där  $a_1 = 2$  och

$$a_{n+1} = \frac{3}{2 + a_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

är konvergent, och om så är fallet beräkna dess gränsvärde.

(6p)

6. Visa att funktionsserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + k^2}$$

är punktvis konvergent på  $[0, \infty)$  och likformigt konvergent på  $[0, R]$  för varje  $R > 0$ . Avgör om funktionsserien är likformigt konvergent på  $[0, \infty)$ .

(7p)

7. Formulera och bevisa Taylors formel med resttermen på Lagranges form.

(8p)

8. Formulera rotkriteriet för positiva serier. Visa att påståendet i satsen också gäller om  $\lim_{k \rightarrow \infty}$  ersätts med  $\limsup_{k \rightarrow \infty}$ .

(5p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK