

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2015-04-16, TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: John Bondestam Malmberg, 0703-088304

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen

$$y'' + 2y' + 2y = (x^2 + 2x + 3)e^{-x}. \quad (7p)$$

2. Bestäm den funktion $y(x)$ som satisfierar differentialekvationen

$$(x^3 - x)y' = y - y^3$$

och för vilken $y(1/2) = 1/2$. (6p)

3. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{x^x} - 1}{x^{x^x - 1}}. \quad (6p)$$

4. För vilka reella tal x är serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k,$$

där $a_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}$, absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent? (6p)

5. För vilka $p > 1$ konvergerar talföljden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ med

$$x_n = \sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \dots \sqrt[p]{1}}} \quad (n \text{ rötter}) \quad (6p)$$

6. Visa att serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k (1-x)$$

konvergerar punktvis på intervallet $[0,1]$ men inte likformigt på $[0,1]$. Visa också att

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x)$$

konvergerar likformigt på intervallet $[0,1]$.

(5p)

7. Formulera och bevisa Weierstrass M-sats.

(6p)

8. Antag att $a_k \downarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Visa att serierna $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ båda konvergerar eller båda divergerar. Använd t ex detta för att visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \min(a_k, \frac{1}{k})$ divergerar om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK