

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2017-01-13,
TID(14.00-18.00)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Peter Kumlin 3532

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x(e^x + 1) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

2. Lös differentialekvationen¹

$$\begin{cases} y' = (2x + y)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(6p)

3. Beräkna $f^{(6)}(0)$ för

$$f(x) = \sin(x^2) \cos(x) \ln(1 + x^2).$$

(6p)

4. För vilka $p \in \mathbb{R}$ konvergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n \sin(\frac{1}{n}))^p?$$

(6p)

V.G.V.

¹Tips från coachen: Gör variabelbytet $z(x) = 2x + y(x)$.

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x - 3)^{2n+1}$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(7p)

6. Avgör för vilka $a \in \mathbb{R}$ som

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} \frac{\sin xy}{x}$$

existerar samt beräkna gränsvärdet i dessa fall.

(5p)

7. Formulera och bevisa fixpunktssatsen.

(6p)

8. Antag att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är begränsade talföljder.

(a) Visa att om $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (dvs talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar) så gäller

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(b) Avgör om

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

gäller för alla begränsade talföljder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

(3+4p)

Information om när tentan är färdiggrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK