MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2018-01-12, TID(14.00-18.00)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Linnea Hietala ankn 5325

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen
$$\begin{cases} y'' + y = \cos^2 x \cdot \sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$
(7p)

2. Lös differentialekvationen
$$\begin{cases} y' + \cos^2 x \cdot y = 2\cos^2 x - 1 + \sin^2 x \cdot y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$
(6p)

3. Beräkna för $a > 0$
$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1).$$
(5p)

4. För $p > 0$ beräkna
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}.$$
(7p)

V.G.V.

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^{1+\frac{1}{n}}} x^{2n}$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(7p)

6. Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ beteckna den strängt växande följden av alla rötter till $\tan x = x$ för $x > 0$. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n).$$

(5p)

7. Formulera och bevisa Taylors formel för $a = 0$ med resttermen på Lagrangeform.

(6p)

8. Visa följande påståenden:

   (a) Låt $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(\tilde{s}_n)_{n=1}^{\infty}$ beteckna två funktionsföljder definierade på ett intervall I. Visa att om båda funktionsföljderna konvergerar likformigt på I med gränsfunktioner som är begränsade, så kommer också funktionsföljden som ges av produkterna $s_n \cdot \tilde{s}_n$ att konvergera likformigt på I.

   (b) Sätt $I = (0, \infty)$ och

$$\begin{cases} s_n(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt{x}} \\ \\ \tilde{s}_n(x) = nxe^{-nx} \end{cases}$$

   för $x \in I$ och $n = 1, 2, 3, \ldots$. Det gäller att

   - $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(\tilde{s}_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar punktis på I men ej likformigt på I
   - $(s_n \cdot \tilde{s}_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på I.

(3+4p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK