

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2018-08-23,
TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Edvin Wedin ankn 5325

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y^{(4)} - y = 0 \\ y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

(7p)

2. Lös differentialekvationen

$$xy' + \frac{1}{2}y = y^2, \quad x > 0.$$

(6p)

3. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right).$$

(5p)

4. Betrakta talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ där $a_1 = a$, $a_2 = b$ och

$$a_{n+1} = pa_{n-1} + (1-p)a_n, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Bestäm för vilka värden på $a, b, p \in \mathbb{R}$ som talföljden konvergerar.

(6p)

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln(k+1))^2} x^k$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(6p)

6. Sätt $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$ och $g_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$ för $x \in [0, \infty)$ och $n = 1, 2, 3, \dots$. Betrakta de tre funktionsserierna $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ och $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$. Avgör vilka serier som är likformigt konvergenta på $[0, \infty)$ eller bara punktvis konvergenta på $[0, \infty)$ eller ingetdera.

(7p)

7. Formulera och bevisa Leibniz konvergenzkriterium.

(6p)

8. Antag att f är en deriverbar funktion på $[a, b]$, $a < b$. Enligt medelvärdessatsen för integraler finns för varje $x \in (a, b)$ minst ett $c(x) \in (a, x)$ sådant att

$$\int_a^x f(t) dt = f(c(x))(x - a).$$

Antag att $f'(a) \neq 0$. Visa¹ att $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{c(x)-a}{x-a}$ existerar och är lika med $\frac{1}{2}$.

(7p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK

¹Tips: Betrakta kvoten

$$\frac{\int_a^x f(t) dt - xf(a) + af(a)}{(x-a)^2}.$$