BLANDADE UPPGIFTER till kapitel 16-20

Uppgifterna i de olika kapitlen har i regel bara varit tillämpningar på respektive kapitelavsnitt. Följande problem är avsedda som övning på innehållet i kapitlen 16-20. För att kunna lösa dem behöver man i många fall kombinera kunskaper från flera olika avsnitt. Uppgifterna är ordnade i grupper om fem så att varje sådan grupp kan tänkas utgöra en problemtentamen. Inom varje grupp är uppgifterna dessutom ordnade efter svårighetsgrad så att de tre första, d.v.s. de med nummer som slutar på 1, 2, 3, 6, 7 eller 8 är enklare, s.k. standardproblem, fjärde uppgiften (med nummer som slutar på 4 eller 9) är något svårare och femte uppgiften (med nummer som slutar på 5 eller 0) är svårast.

1. Undersök om följande serier är konvergenta eller divergenta:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\frac{\pi}{n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{\pi}{n}$

2. Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - \sin x}{x(1-\cos x)}.$$

3. Utveckla $|x|\cos x$ i fourierserie med perioden 2π.

4. För vilka reella x konvergerar potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2 - n^{-0.5})^n x^n \ ?$$

5. Betrakta funktionsföljden $f_1(x) = \sqrt{2+x}$, $f_2(x) = \sqrt{2+f_1(x)}, \ldots,$ $f_{k+1}(x) = \sqrt{2+f_k(x)}, \ldots$. Beräkna $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$, om gränsvärdet existerar. Är konvergensen likformig på några intervall? Bestäm i så fall dessa intervall.

6. Bestäm fourierserien med perioden 2π till funktionen x^3.

7. Bestäm den lösning y_n till differensekvationen

$$y_{n+3} + 4y_{n+2} + 6y_{n+1} + 4y_n = 0$$

för vilken $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = -2$.

8. Beräkna

$$\lim_{x\to\infty} x^4\left(\ln\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{x}\right).$$

9. För vilka reella x konvergerar potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!} x^n \ ?$$

10. Undersök om gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}-\ln\ln n\right)$$

existerar.

11. Bestäm fourierserien till den udda funktion med perioden 2π för vilken

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{då} \quad 0\le x\le \pi/2 \\ \pi-x & \text{då} \quad \pi/2\le x\le \pi. \end{cases}$$

12. Beräkna för $\arctan 0.5$ ett korrekt avkortat närmevärde med 2 decimaler.

13. Beräkna $\sum_{k=1}^{n} k^3$ med hjälp av en lämplig differensekvation.

14. Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$xy''+xy'+y=0,\;\; y(0)=0,\; y'(0)=1$$

i form av en potensserie $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. För vilka x satisfierar denna lösning differentialekvationen? Försök också ange lösningen $y(x)$ **utan** hjälp av en potensserie.

15. Konvergerar eller divergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k}}?$$

16. Undersök om serien $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k\sqrt{k}-\cos k}$ är konvergent.

17. Bestäm $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{x/2}-\frac{x^2}{2}-1}{x^3}$.

18. För vilka reella tal x konvergerar potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}x^n\ ?$$

19. Utveckla $\cos x$ i sinusserie på intervallet $]0,\pi[$.

20. För vilka reella tal x konvergerar funktionsserien

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{x}\ ?$$

21. Lös differentialekvationen $y' = xy^2 + x^3$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 2$ approximativt genom taylorutveckling. Tag med termer till och med tredje graden.

22. Undersök för vilka reella tal x potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \ln n}{n^n} x^n$ konvergerar.

23. Bestäm tredjegradspolynomet $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ så att gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - P(x)}{x^4}$$

existerar.Beräkna sedan gränsvärdet.

24. Bestäm fourierserien till den udda periodiska funktion f med perioden 2π, som definieras av att

$$f(x) = x(\pi - x) \text{ då } 0 \le x \le \pi.$$

Beräkna sedan $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$.

25. Avgör om serien $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ är konvergent om

$$a_n = (\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ldots + \ln n)^{-1}, n = 2, 3, \ldots.$$

26. Undersök vilka av följande serier som är konvergenta

a)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{-n}{n+1})^n$ b)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^n$ c)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$

27. Beräkna $f^{(4)}(0)$ då $f(x) = e^{-2x} \cos 3x \arctan 4x$.

28. a) Utveckla funktionen $f(x) = 1 + x/\pi$ i sinusserie för $0 < x < \pi$.
b) Beräkna med hjälp av resultatet i a) summan av serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \text{ där } a_n = 9 \text{ resp. } 1 \text{ då } n \text{ är udda resp. jämnt.}$$

29. För vilka reella tal x konvergerar potensserien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} x^n$?

30. Beräkna $\lim_{x \to \infty} (\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k})^{1/\ln n}$.

31. Bestäm fourierserien till en udda funktion f med perioden 2π för vilken

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{\pi} & \text{då } 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{då } \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

Förenkla fourierkoefficienterna!

32. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{\ln(x+1)-\ln x}-x)$.

33. Konvergerar eller divergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,där

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{2n}}?$$

34. Till differentialekvationen $xy''+y'+2xy=0$ söker man en lösning $y(x)$ för vilken $y(0)=1$ och $y'(0)=0$. Det finns en sådan lösning, som kan skrivas som en potensserie $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

a)Bestäm de fyra första termer,som ej är identiskt noll, i denna serie.

b)Bestäm a_k för godtyckligt $k \geq 0$.

c)För vilka reella tal x är den erhållna potensserien en lösning till differentialekvationen ? Motivera fullständigt!

35. Beräkna för $n \geq 1$ den n-radiga determinanten

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}.$$

36. Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos 2x - x\sin 3x}{x^4}$.

37. Funktionen f definieras av

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{för} \quad -\pi < x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{för} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{för} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

a) Bestäm fourierserien till f.

b) Beräkna explicit de sex första termer, som inte är identiskt noll, i f:s fourierserie.

38. För vilka reella tal x konvergerar serien $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln n)^2}$?

39. Beräkna summan av serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k}$ genom att först beräkna den n:te delsumman med hjälp av en lämplig differensekvation.

40. Funktionsföljden $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ definieras på $[0,\infty[$ genom

$$f_n(x) = \frac{4x + nx(1 + x + nx^2)}{4 + nx(1 + nx)}.$$

Avgör om funktionsföljden konvergerar likformigt på hela intervallet $[0,\infty[$ eller på någon del av detta intervall.

41. Konvergerar eller divergerar serien $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{2}{n}}{\ln\sqrt{n}}$?

42. Bestäm de potensserier, som är lösningar till differentialekvationen

$$x^2y'' + (x - x^2)y' - y = 0.$$

Ange deras konvergensradier.

43. Beräkna fourierserien till funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{då} \quad -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{då} \quad -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{då} \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

44. Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e}{2x} - e + (1 + \frac{1}{x})^x}{\frac{1}{x}\ln(1 + \frac{1}{x})}$.

45. Undersök om funktionsföljden $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, där

$$f_n(x) = \frac{n^2\sqrt{n}}{n^4(x + \frac{1}{n})^2 + 1}$$

konvergerar likformigt på intervallet $]0,1[$.

46. Undersök om följande serier är konvergenta

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 + \sqrt{n}}$; b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(1 + \frac{1}{n})^n}$.

47. Bestäm konstanterna a och b så att

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}(\cos x - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2})$$

existerar ändligt och beräkna gränsvärdet.

48. Bestäm fourierserien till funktionen f given av att

$$f(x) = \frac{\pi^2 - 3x^2}{12}, -\pi \leq x \leq \pi.$$

Ange fourierseriens summa då $x = 0$ och då $x = \pi$.

49. För vilka reella tal x konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty}(2 + \frac{1}{2n})^n n^{-1/2} x^n$?

50. Betrakta funktionsföljden $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, där $f_1(x) = x$ och $f_{k+1}(x) = \sqrt{x + 2f_k(x)}$. Bestäm gränsfunktionen om följden konvergerar. Avgör om och var följden konvergerar. Ange de intervall på vilka konvergensen är likformig.

51. Beräkna för $\sin 1.8^\circ = \sin \frac{\pi}{100}$ ett korrekt avkortat närmevärde med 5 decimaler. Man vet att närmevärdet $\pi \approx 3.1416$ är korrekt avkortat.

52. Bestäm en potensserie $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, som är en lösning till differentialekvationen $xy'' - y' - xy = 0$.

53. Bestäm de värden på den reella konstanten a för vilka

$$\lim_{x \to 0+} x^{-a}(\tan x - \arctan x)$$

existerar och beräkna gränsvärdet för dessa värden på a.

54. Bestäm fourierserien till funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{då} \quad -\pi \leq x < 0 \\ x \cos x & \text{då} \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Vad är fourierseriens summa? Rita figur då $|x| \leq 3\pi$.

55. För vilka värden på de positiva konstanterna a och b konvergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{c_n} \text{ där } c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{b+k} \text{ ?}$$

REPETITIONSFRÅGOR

Följande repetitionsfrågor täcker det viktigaste av den teori som behandlas i denna del av läroboken.När Du övar Dig på dem, behöver och bör Du inte använda samma ordval som vi i vår text. Definitioner, satser och bevis skall inte läras in som en utantill-läxa. Observera dock följande:

1) Då man presenterar en definition skall man ange de standardbeteckningar som hör till definitionen, t.ex. $f'(x), (Df)(x)$ och $\frac{df}{dx}(x)$, då man definierar derivatan av en funktion f.

2) När man formulerar en sats får man inte glömma någon av förutsättningarna.

3) Då man bevisar en sats skall man motivera varje steg, t.ex. genom att hänvisa till en definition eller en tidigare sats. Man kan exempelvis säga: "enligt definitionen av derivata" och "enligt satsen om inversens derivata", men däremot inte "enligt känd sats" och heller inte "enligt sats 17.2 på sid. 64". Om man vill hänvisa till en sats som inte har något särskilt namn, får man citera satsens lydelse.

4) Man måste förklara alla icke-standardbeteckningar som man använder.

KAP. 16. TAYLORS FORMEL MED TILLÄMPNINGAR

1. Formulera och bevisa Taylors formel.
2. Antag att $D^k f(a) = 0$ för $k = 1, 2, \ldots, n-1$, medan $D^n f(a) \neq 0$. Hur kan man då avgöra om $f(x)$ har ett maximum eller minimum i punkten a? Bevisa ditt påstående.
3. a) Ange resttermen på integralform i Taylors formel.
   b) Använd denna för att härleda Lagranges restterm.
4. a) Skriv upp Maclaurins formel och ange tillräckliga förutsättningar för att formeln skall gälla.
   b) Skriv funktionen $\cos x$ enligt Maclaurins formel med Lagranges restterm av ordningen 10.
5. Låt $R_n(x)$ vara resttermen i maclaurinutvecklingen av $\sin x$. För vilka x gäller att $R_n(x) \to 0$, då $n \to \infty$? Bevisa påståendet.
6. Härled maclaurinutvecklingen av $\ln(1+x)$.
7. a) Formulera entydighetssatsen för maclaurinutvecklingar.
   b) Bevisa satsen.
8. Härled maclaurinutvecklingen för funktionen $\arctan x$. För vilka x-värden kan resttermen göras godtyckligt liten, då heltalet n väljes tillräckligt stort.
9. Beräkna värdet av $D^{25}(\arctan x)$ för $x = 0$. Formulera de satser som därvid används.
10. Härled maclaurinutvecklingen med Lagranges restterm för funktionen $(1+x)^p$ där p är en reell konstnt.
11. a) Beräkna $D^n(\sqrt{1+x})$ för varje naturligt tal n.
    b) Utveckla $\sqrt{1+x}$ enligt Maclaurins formel.

12. Redogör (gärna med hjälp av ett exempel) för hur man kan härleda maclaurinutvecklingen av en produkt $f(x)g(x)$ ur motsvarande utvecklingar av $f(x)$ och $g(x)$.
13. Redogör för olika metoder att beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, om $\frac{f(x)}{g(x)}$ får formen $\frac{0}{0}$ då $x \to a$. Bevis krävs inte.
14. a) Formulera l'Hospitals regel för gränsvärdet $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$, om både $f(x)$ och $g(x) \to 0$ då $x \to b^-$.
b) Bevisa satsen.

KAP. 17. TALFÖLJDER OCH LINJÄRA DIFFERENSEKVATIONER

1. a) Hur definieras och betecknas en (ändlig eller oändlig) talföljd ?
b) Definiera begreppet gränsvärde till en (oändlig) talföljd.
c) Vad menas med att en (oändlig) talföljd konvergerar resp. divergerar?
d) Vad menas med att en (oändlig) talföljd divergerar mot ∞ resp. $-\infty$?
2. Härled följande gränsvärden: a) $\lim_{n\to\infty} k^n$, där k är en konstant
b) $\lim_{n\to\infty} P(n)k^n$, där $P(n)$ är ett polynom och k är en konstant med $|k| < 1$.
3. a) Definiera differensen (av första ordningen) till en funktion y_n som endast är definierad på en mängd av konsekutiva heltal. b) Jämför differensen i a) med derivatan till en funktion $y(x)$,som är definierad på ett intervall.
4. Definiera följande begrepp: a) rekurrensekvation b) differensekvation
c) linjär differensekvation av första resp. andra ordningen med konstanta koefficienter
d) Fibonaccis talföljd.
5. a) Formulera en sats om den allmänna lösningen till en linjär differensekvation av första ordningen med konstanta koefficienter. b) Bevisa satsen.
6. Formulera a) en sats om lösningar till en homogen, linjär differensekvation då $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \ldots, y_n^{(k)}$ är kända lösningar till ekvationen.
b) en sats om lösningsmängden till en inhomogen, linjär differensekvation, då man känner en partikulärlösning till ekvationen.
7. a) Definiera den karakteristiska ekvationen till en linjär differensekvation med konstanta koefficienter. b) Formulera en sats om den allmänna reella lösningen till en homogen, linjär differensekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter i de olika fall som kan inträffa. c) Bevisa satsen i b) då rötterna till den karakteristiska ekvationen är reella och olika.
d) Dito då den karakteristiska ekvationen har en dubbelrot.
e) Dito då rötterna är icke-reella.

8. Låt $Q(n)$ vara ett polynom och k och ω givna konstanter.Ange då en lämplig ansats till en partikulärlösning till en inhomogen, linjär differensekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter om högerledet är
a) $Q(n)$ b) $Q(n)k^n$ c) $Q(n)k^n \cos n\omega$ resp. $Q(n)k^n \sin n\omega$
d) en summa av termer av typerna a)-c).

KAP. 18.NUMERISKA SERIER

1. Definiera för en serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a) n:te delsumman b) konvergens resp. divergens c) summan d) divergens mot ∞ resp. $-\infty$.
2. a)Definiera begreppet geometrisk serie med kvoten q.
b)Härled för vilka q som en sådan serie konvergerar resp. divergerar, och bestäm dess summa, då den konvergerar.
3. Formulera ett nödvändigt villkor för en series konvergens och bevisa påståendet.
4. Härled följande gränsvärden: a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, där a är en positiv konstant
b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ c) $\lim_{n\to\infty} a^n/n!$, där a är en konstant.
5. Definiera följande begrepp: a) växande resp. avtagande talföljd
b) strängt växande resp. strängt avtagande talföljd
c) monoton resp. strängt monoton talföljd
d) talföljd som är nedåt resp. uppåt begränsad e) begränsad talföljd.
6. a) Ange ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att en monoton talföljd skall vara konvergent. b) Bevisa påståeendet.
7. a) Skriv upp Stirlings formel för $n!$
b) Ge en motivering för att formeln ger $n!$ med rätt storleksordning.
8. a) Definiera begreppet positiv serie.
b) Formulera huvudsatsen för positiva serier.
c) Bevisa satsen.
9. a) Formulera integralkriteriet. b) Bevisa satsen.
10. a) Formulera en sats om konvergens resp. divergens för serien $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-p}$, där p är en konstant.
b) Bevisa satsen.
11. a) Formulera jämförelsekriteriet för positiva serier.
b) Bevisa satsen.
12. a) Formulera jämförelsekriteriet på gränsvärdesform för positiva serier.
b) Bevisa satsen.
13. a) Formulera rotkriteriet och kvotkriteriet för positiva serier.
b) Bevisa rotkriteriet. c) Bevisa kvotkriteriet.

14. a) Formulera satsen om absolut konvergens i det reella fallet.
b) Bevisa satsen.
c) Definiera begreppen absolut resp. betingat konvergent serie.

15. a) Definiera begreppet alternerande serie.
b) Formulera Leibniz' konvergenskriterium. c) Bevisa satsen.

16. a) Formulera satsen om absolut konvergens i det komplexa fallet.
b) Bevisa satsen.

17. Formulera satsen om omordning av en absolut resp. betingat konvergent serie.

KAP. 19. POTENSSERIER

1. a) Vad är taylorserien resp. maclaurinserien till funktionen f?
b) Utveckla följande funktioner i maclaurinserier och ange de intervall i vilka resp. serier konvergerar: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\arctan x, (1+x)^p$, $\arcsin x$.
c) Bevisa påståendet i b) för e^x och $\arctan x$.

2. Vad menas med en potensserie?

3. Visa att om potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar i punkten $x_0 \neq 0$, så konvergerar serien absolut för alla x sådana att $|x| < |x_0|$.

4. Låt $M = \{x : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar$\}$. Hur kan M se ut? Bevisa påståendet!

5. Antag att $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ eller $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ existerar. Ange och bevisa en formel för beräkning av konvergensradien till potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

6. Redogör för en metod att finna en lösning till en differentialekvation i form av en potensserie.

7. a) Visa med exempel att termvis derivering eller integrering av en funktionsserie inte alltid ger seriesummans derivata resp. integral.
b) Formulera en sats om termvis derivering och integrering av potensserier.

8. Formulera och motivera Eulers formler för komplexa z.

KAP. 20. FOURIERSERIER

1. Definiera vad som menas med
a) ett trigonometriskt polynom b) en trigonometrisk serie
c) fourierserien till en funktion f.
d) Ge exempel på begreppen i a)-c).

2. Härled de förenklade formler som gäller för fourierkoefficienterna då
a) funktionen är jämn b) funktionen är udda.

LEDNINGAR

(Vi nöjer oss med att ge ledning till en lösningsmetod och väljer då oftast "den minst trickbetonade".)

KAPITEL 16

1608. Maclaurinutveckla integranden $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$ genom att i a) utveckla $\sin x$ och i b) e^{-t} och sedan sätta $t = \frac{x^2}{2}$. Då är $\int_0^1 f(x)\,dx =$ $= \int_0^1 P_n(x)\,dx + \int_0^1 R_{n+1}(x)\,dx$, där $|\int_0^1 R_{n+1}(x)\,dx| \leq$ $\leq \max_{0\leq x\leq 1}|f^{(n+1)}(x)| \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,dx$. Uppskatta det sista ledet och välj n så att värdet blir $< 10^{-3}$ resp. 10^{-4}. Beräkna sedan $\int_0^1 P_n(x)\,dx$ med försöksvis tre resp. fyra rätt avkortade decimaler i slutresultatet. Välj i annat fall ett större n. I a) räcker $n = 6$ och i b) $n = 9$.

1612. Derivera båda leden i differentialekvationen.

1629. Skriv $\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{16 + x - 16} = 2(1 + \frac{x-16}{16})^{1/4}$ eller taylorutveckla kring punkten 16.

1630. $33 = 32(1 + \frac{1}{32})$.

1633. Jfr ledning till 1608.

1635. a) Partialbråksuppdela; d) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = (1-x)^{1/2}(1+x)^{-1/2}$;
f) Jfr ex. 13, sid. 21; g) Jfr ex. 14, sid. 22.

1636. f) Använd att $y = e^{\ln y}$ då $y = (\cos x)^{x^{-2}} > 0$, och se ex. 13, sid. 21.

1637. b) $1 + e^x = e^x(e^{-x} + 1)$; c) använd att $y = e^{\ln y}$ då $y = (1 + \frac{1}{x})^{-x^3} > 0$.

1640. a) Maclaurinutveckla $\sin u$ och tag $u = xt$. b) Maclaurinutveckla e^{-t^2}.

1642. d) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$.

1643. c) $\dfrac{\operatorname{arccot} x}{x^{-1}}$; d) $x^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{\ln x}{x-1}}$;
e) $(1 + \dfrac{a}{x})^x = e^{x\ln(1+\frac{a}{x})}$. Skriv sedan exponenten som $\dfrac{\ln(1+\frac{a}{x})}{x^{-1}}$.

KAPITEL 17

1702. Skriv uttrycket $\dfrac{2n(2n-1)\ldots[2n-(k-1)]}{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}$ och dividera täljare och nämnare med n^k.

1704. Observera att termerna i summan avtar då k växer. Använd detta för att uppskatta summan uppåt och nedåt.

KAPITEL 18

1802. a) Visa först att $1 - q + \ldots + (-1)^n q^n = \frac{1-(-q)^{n+1}}{1+q}$.
b) Vänstra ledet kan skrivas $-1 + \frac{2}{1-q}$. Byt ut q mot $-q$ i a).

1803. a) Vad blir n-te delsumman s_n ?

1810. Beräkna först delsummorna $\sum_{k=1}^{n} a_k$ och $\sum_{k=p}^{n} a_k$.

1811. Beräkna först delsummor.

1812. c) Använd gränsvärdet 2° i sats 18.4 ; d)För $n \geq 6$ är $7n^4 + 1000 < 8n^4$;
e) Vilken av termerna n^3 och 3^n är störst för stora tal n ?
f) Vilken av termerna 3^n och 7^n är störst ?
g)Visa t.ex. först att $n! > (n/2)^{n/2}$.

1816. Visa t.ex. med induktion att talföljden är växande och uppåt begränsad. Bestäm gränsvärdet som i exempel 10.

1821b. Studera $n(n+1)(a_{n+1} - a_n)$.

1823. Jämför summan (eller en delsumma) med en integral.

1824. Var kan den gemensamma tyngdpunkten för de två (resp tre) översta stenarna ligga utan att de ramlar ner?

1825. Uppskatta delsummor med integraler.

1826. a) Jämför med $\int_1^{\infty} t^{-x-1}\,dt$.
b) $f(x) - 1 = \sum_{k=2}^{\infty} k^{-x-1} = 2^{-x-1} + \sum_{k=3}^{\infty} k^{-x-1}$.
Uppskatta den sista summan uppåt med hjälp av en integral.

1828. a) Använd kvot- eller rotkriteriet. Man kan också använda jämförelsekriteriet och en uppskattning $n < e^{cn}$ med t.ex. $c = 1/2$.
b) Använd att för stora tal n är $\ln n < n^p$ med lämpligt p.

1829. a) Förläng med konjugatuttrycket.
b) Maclaurinutveckla $\cos\frac{\pi}{n}$ med en term + restterm.
d) Maclaurinutveckla $\ln\frac{n+1}{n-1} = \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1-\frac{1}{n})$.

1830. a) $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$. Maclaurinutveckla. b) Maclaurinutveckla.
c) Jämför med $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ enligt jämförelsekriteriet på gränsvärdesform.
d) $e^{-(\ln n)^2} = (e^{\ln n})^{-\ln n} = n^{-\ln n} < n^{-2}$ för ....

1831. Uttryck n-te delsumman explicit — i b) med hjälp av partialbråksuppdelning.

1832. a) $x^{\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}\ln x}$ och för varje fixt x i]0,1[är $\sqrt{n}\ln x < -2\ln n$ för stora heltal n.
b) $x^{\ln n} = e^{(\ln x)\ln n} = n^{\ln x}$.

1835. Bevisa absolut konvergens.

1836. b) Använd sats 18.1.

1837. a) Använd Leibniz' kriterium. Visa genom derivering att $\frac{\arctan x}{x}$ är avtagande då x¿0.

b) Använd Leibniz' kriterium. Visa genom derivering att $\frac{\ln x}{x}$ är avtagande då $x > e$.

c) Låt c_n vara summan av termerna med nummer $2n$ och $2n+1$. Visa att $c_n < 0$ och att $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergerar genom att använda jämförelsekriteriet på gränsvärdesform på $\sum_{n=1}^{\infty} -c_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$.

d) Inför c_n enligt ledn. till c) och jämför $-c_n$ med $1/n$.

1838. I en konvergent alternerande serie, vars termer avtar långsamt, kan konvergensen förstöras genom relativt små ändringar av termerna.

1840. Bevisa absolut konvergens.

1842. a) $a_n = a_n^+ + a_n^-$ och $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$. Vilken slutsats kan dras om t.ex. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konvergerar ?

1843. Visa att summan av de 3n första termerna är $s_{4n} + \frac{1}{2}s_{2n}$, där s_k betecknar delsummorna till (6), sid. 80.

b) Visa att bidraget från en grupp av 2n-1 negativa termer och nästa positiva term för stora heltal n är ungefär $-\frac{1}{2n}$.

KAPITEL 19

1901. f) $\ln\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$; h) Gå över till $\cos 2x$;

h) $\ln\frac{1-x}{1+x} = \ln(1-x) - \ln(1+x)$ då $-1 < x < 1$.

1902. Allmän ledning: Konvergensradien R bestäms enklast med hjälp av sats 19.4 i c) och n) och med sats 19.5 i övriga uppgifter utom i p) — se nedan. Vid undersökning av serierna då $x = \pm R$ se kap. 18.

Speciella ledningar: d) Skriv seriens n-te term på formen $e^{f(n)}$ och maclaurinutveckla $f(n)$ då $x = R$. g) Använd Stirlings formel då $x = R$. h) Se ledn. till g) då $x = R$. Använd Leibniz' kriterium då $x = -R$. l) Använd uppg. 1822, sid. 69 då $x = R$. m) Skriv $1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$. n) Skriv n-te termen på formen $\frac{1}{n^2 e^{f(n)}}$ och maclaurinutveckla $f(n)$ då $x = R$. p) Använd att $\ln n < a_n < 1 + \ln n$ för stora heltal n (jfr med uppg. 1825c, sid. 70). r) Använd anm. 5, sid 90. Alt.: Dela upp i två serier.

1903. a) Sätt $x^2 = w$. b) Bryt ut x och sätt sedan $x^2 = w$. c) Sätt $x^3 = w$.

1904. a-c) Använd Stirlings formel. d) Använd anm. 5, sid. 90.

1905. Beräkna $f(0), f'(0)$ o.s.v.

1906. a-b) Använd den geometriska serien (jfr ex.3).
c)Skriv $(\frac{1-x}{1+x})^2 = 1 - \frac{4x}{(1+x)^2}$ och använd ex. 3. d)Jfr ex.3.

1909. a) Integrera $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$. b) Derivera först $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = s(x)$ och sedan $xs'(x)$. d) Börja med att derivera maclaurinserien för e^x.
e) Se ledn. till d). f) Ersätt först $\frac{1}{3}$ med x. g) Se ledn. till b).

1911. Derivera först $f(x)$ sedan $f'(x)$ o.s.v.

1913. Jämför $xf(x)$ med $f(x)$.

1918-22. Fixera x och låt sedan $n \to \infty$, när Du skall bestämma gränsfunktionen.

1942. Tag i de två sista serierna real- resp. imaginärdelen av den första serien.

1943. a) Skriv båda leden på polär form. b-d) Använd Eulers formler. Beräkna sedan $e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$.

KAPITEL 20

2001. a-b) Använd de Moivres formel. c) Använd Eulers formler.

2002. a) Använd satsen om absolut konvergens.
b-c) Undersök först om seriens n-te term $\to 0$ då $n \to \infty$ för fixt x.

2003. Använd sats 20.1 då $f(x)$ är jämn eller udda, annars def.
i) Jfr raderna omedelbart efter definitionen på sid. 122.

2004. Skriv om integranderna som summor.

2006. Använd sats 20.2. Se även kommentaren om periodisk fortsättning sid. 130.

2007. Använd b) och välj t.ex. x så att $\cos nx = (-1)^n$ för alla n.

2008. Använd a) och välj x lämpligt.

2009. Använd sats 20.3 och (13) sid. 135.

2010. d) $s = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{-4} + \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{-4} = \frac{s}{16} + \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{-4}$.
e) Jfr ledn. till d).

2011. Använd (12) i sats 20.4.

2012. Integrera fourierkoefficienterna a_k och b_k partiellt två gånger. Använd sedan sats 20.4 på f'' i stället för f.

2020. Välj x lämpligt i fourierserien när Du skall beräkna summorna; skriv om $\cos 2ks$ i den andra summan.