

## MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2015-08-20,  
TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Zuzana Sabartova, 0703-088304

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

---

**OBS:** Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.  
Ange kod på *varje* inlämnat blad.  
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.  
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 8e^{2x} \sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

(7p)

2. Grafen till  $f(x)$  skär  $y$ -axeln i punkten  $(0, 1)$ . Vidare är

$$(1+x)f'(x) = f(x) + (f(x))^2.$$

Bestäm  $f(\frac{1}{2})$ .

(6p)

3. Bestäm de reella tal  $a$  och  $b$  så att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + a}{x^2} - \frac{b}{x \ln(1+x)} \right)$$

existerar och bestäm detta gränsvärde.

(6p)

4. (a) Ge exempel på en potensserie som har konvergensintervallet  $(-2, 2]$  samt visa att så är fallet.

(3p)

- (b) För vilka  $x$  konvergerar<sup>1</sup>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n^2} \cdot |x|^n?$$

---

<sup>1</sup>Serien är inte en potensserie.

(6p)

5. Avgör om serien  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  konvergerar där  $a_n = 0$  om decimalutvecklingen av  $n$  innehåller siffran 9 och  $a_n = 1$  annars<sup>2</sup>.

(6p)

6. Sätt  $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ ,  $x \in I \equiv [0, 1]$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  Avgör om

- (a)  $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$  konvergerar punktvis på  $I$
- (b)  $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$  konvergerar likformigt på  $I$
- (c) finns en majorerande funktion  $g : I \rightarrow [0, \infty)$ , dvs sådan att
  - i.  $|f_n(x)| \leq g(x)$  alla  $x \in I$  och alla  $n$
  - ii.  $\int_0^1 g(x) dx < \infty$

Slutligen beräkna  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ .

(5p)

7. Formulera och bevisa entydighetssatsen för Taylorutvecklingar.

(6p)

8. Beskriv Newton-Raphsons metod för att lösa  $f(x) = 0$ , dvs beskriv hur följden  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  konstrueras. Ge uppskattningar för, inklusive bevis av,  $|x_{n+1} - \alpha|$  i termer av  $|x_n - \alpha|^2$  och  $|x_n - \alpha|$  i termer av  $|x_{n+1} - x_n|$ , där  $f(\alpha) = 0$ . Ange tillräckliga villkor på  $f$  för påståendena.

(5p)

Information om när tentan är färdiggrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK

---

<sup>2</sup>Hur många av talen  $n \in [10^N, 10^{N+1})$  där  $N$  är ett positivt heltal har  $a_n = 1$ ?