

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2016-04-07,
TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Jakob Hultgren

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och
motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' + y' = \cos(x) \sin(3x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

(7p)

2. Lös differentialekvationen

$$y' = \frac{x^2 y - y}{y + 1}$$

med begynnelsevillkoret $y(3) = 1$.

(6p)

3. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

(6p)

4. Beräkna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}}}{n}.$$

(6p)

V.G.V.

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k+2} k^{1+\frac{1}{k}}} (x+2)^{2k+1}$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(6p)

6. Låt talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara given av $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ och

$$a_{n+1} = \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Avgör om talföljden konvergerar, och om så skulle vara fallet beräkna dess gränsvärde.

(6p)

7. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats.

(6p)

8. Låt f vara en positiv deriverbar funktion på $(0, \infty)$ sådan att f' är avtagande med $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$. Visa att serierna

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$$

och

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(n)}{f(n)}$$

är båda konvergenta eller båda divergenta.

(7p)

Information om när tentan är färdiggrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK