

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2018-04-05,
TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Peter Kumlin ankn 3532

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y''' + y = \cos^2 x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x^x} - y \cdot \ln x, & x > 0 \\ y(e) = 1 \end{cases}$$

(6p)

3. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$$

(5p)

4. Avgör om serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

där

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n \neq m^2 \text{ alla positiva heltal } m \\ \frac{1}{n} & \text{annars} \end{cases}$$

konvergerar.

(6p)

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1) x^n$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(6p)

6. Låt $g(x)$ beteckna den kontinuerliga funktionen e^x på \mathbb{R} . Sätt

$$f_n(x) = \ln\left(\frac{nx}{n+1}\right), \quad x \in (0, \infty), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

och

$$g_n(x) = g(f_n(x)), \quad x \in (0, \infty), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Avgör om

(a) f_n konvergerar likformigt på $(0, \infty)$

(b) g_n konvergerar likformigt på $(0, \infty)$

(7p)

7. Formulera och bevisa Taylors formel för $a = 0$ med resttermen på Lagrangeform.

(6p)

8. Antag att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en kontraktion på \mathbb{R} . Visa att

(a) f har en unik fixpunkt på \mathbb{R}

(b) för varje $x_0 \in \mathbb{R}$ kommer följderna av iterat, dvs $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ för $x_{n+1} = f(x_n)$, att konvergera mot fixpunkten.

(7p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK