

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2019-01-18,
TID(14.00-18.00)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Peter Kumlin ankn 3532

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 4y = e^{2x} + e^{-x} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases} \quad (7\text{p})$$

2. Lös differentialekvationen¹

$$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}, \quad x > 0. \quad (7\text{p})$$

3. Beräkna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \right)^n. \quad (6\text{p})$$

4. Avgör för vilka $a \in \mathbb{R}$ som gränsvärdet

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} x e^{axy - x^2 - y^2}$$

existerar. (5p)

V.G.V.

¹Tips från coachen: Gör variabelbytet $y(x) = xz(x)$.

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (\sqrt[n]{n} - 1) x^{2n}$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(7p)

6. Antag att $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ är en kontinuerlig funktion som är deriverbar för varje $x \in (0, 1)$. Visa att f har en entydigt bestämd fixpunkt om $f'(x) \neq 1$ för alla $x \in (0, 1)$.

(5p)

7. Formulera och bevisa integralkriteriet för positiva serier.

(6p)

8. Antag att g_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, och g är kontinuerliga funktioner på $[0, 1]$. Antag vidare att

(a) $g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq g(x)$ för alla $x \in [0, 1]$ och $n = 1, 2, 3, \dots$, och att

(b) $g_n \rightarrow g$ punktvis på $[0, 1]$.

Visa att $g_n \rightarrow g$ likformigt på $[0, 1]$.

(7p)

Information om när tentan är färdiggrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurskansliet. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK