MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2019-04-25, TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Per Ljung ankn 5325

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Visa att x^2e^x löser differentialekvationen

$$y^{(4)}(x) - 4y'''(x) + 10y''(x) - 12y'(x) + 5y(x) = 8e^x.$$

Bestäm samtliga lösningar till differentialekvationen.

(7p)

2. Bestäm talen A och a så att differentialekvationen

$$y''(x) + 2(1-x)y'(x) + x(x-2)y(x) = 0$$

efter substitutionen

$$y(x) = e^{v(x)}z(x),\ v(x) = Ax^a$$

övergår i en differentialekvation med konstanta koefficienter. Lös med ledning av detta den ursprungliga differentialekvationen.

(7p)

3. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n})^{\frac{1}{\ln n}}.$$

(6p)

4. För vilka $x \in \mathbb{R}$ är serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{x^n \ln n}{n(n+2)}$$

absolutkonvergent, betingat konvergent repektive divergent.

(5p)

5. För vilka reella tal x konvergerar serien[1]

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} n^x x^n?$$

(5p)

6. Antag att f_n är kontinuerliga funktioner på intervallet $[0,1]$ och att funktionsföljden $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt $[0,1]$. Antag vidare att

$$\begin{cases} g_n'(x) + g_n(x) = f_n(x), \ x \in [0,1] \\ g_n(0) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Visa att funktionsföljden $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på $[0,1]$.

(7p)

7. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats.

(6p)

8. Antag att $f \in C^2(I)$, där $I \subset \mathbb{R}$ är ett öppet intervall, och att $f(\alpha) = 0$ där $\alpha \in I$. Antag vidare att $x_0 \in I$ är en startpunkt för Newton-Raphsons metod att denna metod ger en följd $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ i I. Visa att

   (a) $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{K}{2L} |x_n - \alpha|^2$

   (b) $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{K}{2L} |x_{n+1} - x_n|^2$

   för $n = 1, 2, 3, \ldots$, där $K = \sup_{x \in I} |f''(x)|$ och $L = \inf_{x \in I} |f'(x)|$.

(7p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

[1] Detta är ingen potensserie.