

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2019-08-22,
TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Andreas Petersson ankn 5325

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$$

Det gäller att denna differentialekvation har två lösningar y_1, y_2 sådana att

$$y_1(x) = xy_2(x)$$

för alla x .

(6p)

2. Bestäm för alla reella tal a samtliga lösningar till differentialekvationen

$$y'' + \frac{ay}{x^2} = 0, \quad x > 0.$$

(8p)

3. Betrakta serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

där $c_n = \frac{a}{n+1}$ för n udda och $c_n = \frac{b}{n+2}$ för n jämnt och $a, b \in \mathbb{R}$. Avgör om a och b väljas så att serien blir konvergent med summan 1 samt bestäm de a, b för vilka detta gäller.

(6p)

4. För vilka $x \in \mathbb{R}$ är serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

absolutkonvergent, betingat konvergent repektive divergent.

(5p)

5. För $x \geq 0$ bilda funktionsföljden

$$f_1(x) = \sqrt{x}, f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}, f_3(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, \dots$$

Bestäm

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))$$

och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x))$$

samt avgör om funktionsföljden är likformigt konvergent på intervallet $[0, \infty)$.

(6p)

6. Bestäm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1 + x^n(2+x)^n} dx.$$

(8p)

7. Formulera och bevisa fixpunktssatsen¹.

(6p)

8. Talen a_1, a_2, a_3, \dots är positiva. Visa att de båda serierna

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

och

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$$

konvergerar och divergerar samtidigt.

(5p)

Information om när tentan är färdiggrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

PK

¹Med fixpunktssatsen avses här Sats 1 plus Sats 2 i [INR] eller den variant som gavs på föreläsningarna.