1. $A=\begin{pmatrix}0&2&-6&-2&4\\0&-1&3&3&2\\0&-1&3&7&10\end{pmatrix}\begin{matrix}\boxed{1/2}\\\leftarrow\\\leftarrow\end{matrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}0&2&-6&-2&4\\0&0&0&2&4\\0&0&0&6&12\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\boxed{-3}\\\leftarrow\end{matrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}0&2&-6&-2&4\\0&0&0&2&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\equiv U$

$\therefore A=LU$ där $L=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1/2&1&0\\-1/2&3&1\end{pmatrix}$.

---

2. Gram-Schmidt $\Rightarrow$ ON-bas för $U$. Låt $\tilde{q}_1=u_1, \tilde{q}_2=u_2-((u_2\cdot\tilde{q}_1)/|\tilde{q}_1|^2)\tilde{q}_1=(1,1,-2)-\frac{(-5)}{5}(-1,0,2)=$ $(0,1,0)$ $\quad\therefore q_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\quad q_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ är en ON-bas för $U$. Projektion av $v$ på $U$ ger

$$\mathrm{Proj}_U(v)=(v\cdot q_1)q_1+(v\cdot q_2)q_2=\frac{10}{5}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}=v$$

Dvs $v\in U$ så $v=v+0$ där $v\in U,\ 0\in U^\perp$, är den sökta summan. <u>Alternativ:</u> Projektionsmatrisen $P=A(A^TA)^{-1}A^T=\ldots=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&5&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$, så $Pv=\ldots=v\in U$ där $U=V(A)\quad A=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\\2&-2\end{pmatrix}$.

---

3. $0=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\-1&1-\lambda&-1\\-1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2\Rightarrow$ egenvärden: $\lambda_1=-1,\ \lambda_{2,3}=2$ och egenvektorer ges av:

$\lambda_1=-1:\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ s\neq 0,$ egenvekt.

$\lambda_{2,3}=2:\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ st\neq 0,$ egenvekt.

Välj för $\lambda=2$ egenvektorn $(1,-1,0)$. Ytterligare egenvektor måste dels uppfylla $x_1+x_2+x_3=0$ men vi vill också välja den ortogonal mot $(1,-1,0)$ dvs $0=x\cdot(1,-1,0)=x_1-x_2$. Lös alltså

$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1-x_2=0\end{cases}\Rightarrow x=t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. Efter normering får vi egenvektorer: $\lambda_1=-1:(1,1,1)/\sqrt{3}$, $\lambda_{2,3}=2:(1,-1,0)/\sqrt{2},(1,1,-2)/\sqrt{6}$

$\therefore Q=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&-2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$ och $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$.

Alternativt kan den andra egenvektorn för $\lambda=2$ fås genom $(1,1,1)\times(1,-1,0)=\begin{vmatrix}e_1&e_2&e_3\\1&1&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=$ $(1,1,-2)$.

---

4. Insättning av $t$ och motsvarande $h$ i $h = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ ger ekv. syst. $A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = b$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 45 \\ 80 \\ 105 \\ 120 \end{pmatrix}$. Lösning i minstakvadratmening fås som lösning till $A^T A x = A^T b$.

$$A^T A = \ldots = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix}, \; A^T b = \begin{pmatrix} 350 \\ 1000 \\ 3230 \end{pmatrix}.$$

Gausselimination ger $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 10 & 30 & 350 \\ 10 & 30 & 100 & 1000 \\ 30 & 100 & 354 & 3230 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 10 & 100 \\ 2 & 5 & 15 & 175 \\ 30 & 100 & 354 & 3230 \end{array}\right) \begin{matrix} \boxed{-2} \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \boxed{-30} \\ \leftarrow \end{matrix} \overset{RE}{\sim}$

$\overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 10 & 100 \\ 0 & -1 & -5 & -25 \\ 0 & 10 & 54 & 230 \end{array}\right) \begin{matrix} \boxed{10} \\ \leftarrow \end{matrix} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 10 & 100 \\ 0 & 1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 4 & -20 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \boxed{1/4} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ \boxed{-5} \end{matrix} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 10 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$

$\Rightarrow a_1 = v = 50, a_2 = -\frac{1}{2} g = -5 \Rightarrow g = 10.$

---

5. För a): Då $U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u = 0, \forall u \in U\}$ får vi för $u \in U$ och $x \in U^\perp$ att $u \cdot x = 0$, dvs $u \perp x$, $\forall x \in U^\perp$, dvs $u \in (U^\perp)^\perp \; \therefore U \subseteq (U^\perp)^\perp$. Tag nu godtyckligt $u \in (U^\perp)^\perp$ som då kan skrivas $u = u' + u''$ där $u' \in U$ och $u'' \in U^\perp \; \therefore 0 = u \cdot u'' = u' \cdot u'' + u'' \cdot u'' = \|u''\|^2 \Rightarrow u'' = 0 \Rightarrow u = u' \in U \; \therefore (U^\perp)^\perp \subseteq U \; \therefore (U^\perp)^\perp = U$.

b) $x \in (V+W)^\perp \Leftrightarrow 0 = x \cdot (v+w)$, $\forall v \in V w \in W$ speciellt gäller $0 = x \cdot v$ och $0 = x \cdot w$, dvs $x \in V^\perp$ och $W^\perp$ dvs $x \in V^\perp \cap W^\perp$ så $(V+W)^\perp \subseteq V^\perp \cap W^\perp$. Omvända inklusionen på liknande men enklare sätt.

c) Applicera b) på $V^\perp$ och $W^\perp \Rightarrow (V^\perp + W^\perp)^\perp = (V^\perp)^\perp \cap (W^\perp)^\perp$ och a) $\Rightarrow V^\perp + W^\perp = (V^\perp + W^\perp)^{\perp\perp} = ((V^\perp)^\perp \cap (W^\perp)^\perp)^\perp = (V \cap W)^\perp$.

---

6. Klart att $\{1, x, x^2, x^3\}$ spänner $\mathcal{P}_3$. För att se lin. obero. antag $0 = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Välj $x = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0 \Rightarrow 0 = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3x_3 x^2$ och derivation och sätta $x = 0$ igen $\Rightarrow \alpha_1 = 0$. Ytterligare derivationer $\Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ dvs $\{1, x, x^2, x^3\}$ lin. ober. $\therefore$ de är en bas. Alla baser har samma antal element så $k = 3$. Gram-Schmidt $\Rightarrow$ en bas ges av $q_0 = 1$, $q_1 = x - \frac{\langle x, q_0 \rangle}{\|q_0\|^2} q_0 = x$, $q_2 = \ldots = \frac{1}{3}(3x^2 - 1)$, $q_3 = \ldots = \frac{1}{5}(5x^3 - 3x)$.