Kortkort om distributioner

För att beskriva vissa fysikaliska fenomen (punktladdning, stöt, dipol...) måste vi utvidga funktionsbegreppet: hittills har det varit så här: man känner en funktion f, om man känner alla funktionsvärden $f(t)$. Men man kan se en funktion även som en ”operator”: man känner f om man vet ”vad f gör med en tillräckligt stor mängd av andra funktioner”, såk. ”testfunktioner”, fysikalist: man känner ett fysikaliskt fenomen om man känner utgången (mätresultatet) vid tillräckligt många experiment. Det ger nya, såk. ”generaliserade funktioner”, och det skall vi nu beskriva. Ett utmärkt val av testfunktioner (helt tillräckligt för det vi behöver) är

DEFINITION

$\mathcal{S} = \left\{ \Phi : R \to R : \Phi \text{ är } C^\infty, \Phi \text{ och alla dess derivator avtar exponentiellt} \right\}$

(ett annat bra val vore alla C^∞-funktioner som är 0 utanför en kompakt mängd).

Då gäller för alla kontinuerliga funktioner f, g :

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\Phi(t)dt$ för alla $\Phi \in \mathcal{S} \Rightarrow f \equiv g$.

Men då har vi redan allt: $\mathcal{S}$ är ju ett linjärt rum, och ser vi f som den linjära tillordning $\mathcal{S} \to C$ som ordnar till en testfunktion Φ talet $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Phi(t)dt$ (ett ”viktat medelvärde”), så ser vi f som en ”distribution”:

DEFINITION

En linjär avbildning $f : \mathcal{S} \to C$ kallas DISTRIBUTION.

De viktigaste ex. är (det redan kända: ”varje funktion”, och det nya: Diracs δ-puls):

HUVUDEXEMPEL

1) Varje styckvis kontinuerlig funktion f ger upphov till (”kan ses som”) en distribution $T_f : \mathcal{S} \to C$ som definieras genom $T_f(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Phi(t)dt.$

2) DIRACS DELTA FUNKTION $\delta : \mathcal{S} \to C$ definieras genom $\delta(\Phi) = \Phi(0)$ (”evaluering”, väl det allra enklaste?!!).

Observera att T_f är väldefinierad (integralen är konvergent för testfunktioner Φ) och linjär (ty integral), δ är linjär ty $\delta(c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2) = c_1\Phi_1(0) + c_2\Phi_2(0) = c_1\delta(\Phi_1) + c_2\delta(\Phi_2)$.
Distributionerna i ex.1 kallas ”reguljära”, de står modell för allt vi gör med distributioner:
För det första skriver vi $f(\Phi)$ som brukligt för linjära operartorer (och smart) som ”skalärprodukt” $\langle f \mid \Phi \rangle$, ty så funkar det (linjär i varje faktor). Vårt viktigaste linjära rum är

$L_2(a,b) = \left\{ f : [a,b] \to R,\ \|f\|^2 = \int_a^b f^2(t)dt \text{ konvergent} \right\}$ med skalärprodukten

$\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$ (för reellvärda fkt, annars $\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$). Och eftersom denna skalärprodukt ges av en integral så skriver man skalärprodukten som en integral även i det allmänna fallet, ty den funkar precis så (är alltså lättast att räkna med så, reglerna kommer man ihåg enkelt som ”integrerinsregler”). Alltså, f.o.m. nu skriver vi helt obesvärat

$f(\Phi) = \langle f \mid \Phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Phi(t)dt$ för godt. distributioner, alltså även för δ.

Vi skapar nya distributioner (tänk alltid på reguljära distributioner T_f !):

DEFINITION

För en distribution $f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ definieras distributionen
1) f_T genom $\langle f_T \mid \Phi \rangle = \langle f \mid \Phi_{-T} \rangle$ (kom ihåg: $f_T(t) = f(t-T)$)
2) $\tilde{f}$ genom $\left\langle \tilde{f} \mid \Phi \right\rangle = \langle f \mid \tilde{\Phi} \rangle$ (vi skriver här $\tilde{f}(t) = f(-t)$)
3) f' genom $\langle f' \mid \Phi \rangle = -\langle f \mid \Phi' \rangle$
4) Ψf genom $\langle \Psi f \mid \Phi \rangle = \langle f \mid \Psi\Phi \rangle$ (för testfkt Ψ, utvidgas sedan till kontin. Ψ)
5) $\hat{f}$ genom $\left\langle \hat{f} \mid \Phi \right\rangle = \left\langle f \mid \hat{\Phi} \right\rangle$ (vettigt, ty $f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}$).

Kolla med reguljära distributioner rimligheten av dessa definitioner, t.ex. för derivatan av en distribution: $\langle f' \mid \Phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\Phi(t)dt = [\text{part.int.}] = [f(t)\Phi(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Phi'(t)dt = 0 - \langle f \mid \Phi' \rangle$; här ser du igen det fina med våra testfunktioner: $f(t)\Phi(t) \to 0$ då $t \to \pm\infty$!
Det anmärkningsvärda är, att vi i distributionsmening kan derivera funktioner som $|x|$, x^{-n} (ej reguljära distributioner!)...Vi sammanställer nu egenskaper för δ:

SATS

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0)$, $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$ om f är kontinuerlig i 0.
2) $\delta(-x) = \delta(x)$, $\quad \delta(x) = 0$ för $x \neq 0$ (som en funktion!);
   detta tillsammans med $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$ visar att δ ej är en funktion!!!
3) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a)$, $\quad \int_{A}^{B} \delta(x-a)f(x)dx = \begin{cases} f(a), \text{ om } A < a < B \\ 0, \text{ om } a \notin [A,B] \end{cases}$
   OBS: nonsens om $a \in \{A,B\}$!
4) $\theta' = \delta$.
5) $\delta'(-x) = -\delta'(x)$.
6) $\hat{\delta} = 1$, $sgn(t) \supset \frac{2}{j\omega}$.

bevis

4) Vi skall visa att för alla testfunktioner Φ gäller att $\left\langle \theta' \mid \Phi \right\rangle = \langle \delta \mid \Phi \rangle$:

$$\left\langle \theta' \mid \Phi \right\rangle = [\text{definition}] = -\left\langle \theta \mid \Phi' \right\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\Phi'(x)dx = -\int_{0}^{\infty} \Phi'(x)dx = -[\Phi(x)]_0^{\infty} =$$
$$\left[\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 0, \text{ty } \Phi \text{ är testfunktion}\right] = -0 + \Phi(0) = \langle \delta \mid \Phi \rangle \qquad \text{vsv}$$

6) Vi skall visa att för alla testfunktioner Φ gäller att $\left\langle \hat{\delta} \mid \Phi \right\rangle = \langle 1 \mid \Phi \rangle$:

$$\left\langle \hat{\delta} \mid \Phi \right\rangle = [\text{definition}] = \left\langle \delta \mid \hat{\Phi} \right\rangle = \hat{\Phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)dx = \langle 1 \mid \Phi \rangle \qquad \text{vsv}$$

$f(t) = sgn(t) = 2\theta(t) - 1 \Rightarrow f'(t) = 2\delta(t) \supset j\omega\hat{f}(\omega) = 2$; regel 13 sid A3 : 02 ger att $\hat{f}(\omega) = \frac{2}{j\omega} + c\delta(\omega)$; men eftersom f är udda, så är även $\hat{f}$ udda, alltså $c = 0$. vsv

Anmärkning:

δ beskriver en MONOPOL, $-\delta'$ beskriver en DIPOL,... $(-1)^n\delta^{(n)}$ beskriver en 2^n-IPOL i 0.
T.ex. för en dipol: punktladdningar q och $-q$ i avståndet h har dipolmomentet $qh = 1$ med $q = \frac{1}{h}$.
Låt nu h gå mot 0 så fås formellt (och helt korrekt i distributionsmening):
$\lim_{h\to 0} (q\delta(0) + (-q)\delta(h)) = \lim_{h\to 0} \frac{\delta(0)-\delta(h)}{h} = -\delta'$!