

CTH&GU, matematik

Tentamen i matematiska metoder fk, del B, TMA980, 2000-08-15, kl 8.45-12.45**Hjälpmedel:** Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.**Telefon:** , tel 0740-459022**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad!

1. Bestäm m.h.a. Fouriertransformation en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' - y = \theta(t)$. (4p)

2. Ett kausalt tidskontinuerligt LTI-filter har överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{s^2 + 2}{s^3 + 3s^2 + 6s + 4}.$$

- a) Visa att filtret är stabilt och ange filtrets tillståndsekvation. (4p)
- b) Bestäm svaret på $\sin(t) + \sin(\sqrt{2}t)$. (3p)
- c) Bestäm svaret på $(\sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t))\theta(t)$. (3p)
- d) Bestäm en insignal som ger utsignalen $\frac{3}{2}e^{-|t|} - \delta(t)$. (4p)
- e) Visa att $E(y) \leq \frac{1}{4}E(x)$ då x är en insignal med ändlig totalenergi $E(x)$ $\left(= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \right)$ och y är svaret på x . (3p)

3. Ett kausalt tidsdiskret LTI-filter har överföringsfunktionen $H(z) = \frac{z^2}{2z^4 + z^2 + b}$.

- a) För vilka reella b är filtret stabilt? (4p)
- b) Ange för $b = 1$ filtrets tillståndsekvation och filtrets amplitudkaraktistik. (4p)
- c) Bestäm för $b = 1$ utsignalen då insignalen är $x(n) = \cos \frac{n\pi}{4}$. (3p)

4. Visa m.h.a. z-transformation att $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (4p)

5. Lös problemet
$$\begin{cases} (1 + 3t^2)u''_{xx} = u'_t, & 0 < x < 1, 0 < t \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, u(x,0) = \delta'(x - \frac{1}{2}) \end{cases}$$
 (6p)

6. a) Definiera "distribution". (2p)

- b) Visa $\theta(t) \xrightarrow{\text{Laplace}} \frac{1}{s}$, $\bar{f}(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \bar{f}(-\omega)$ och $\theta(n) \xrightarrow{z\text{-transf}} \frac{z}{z-1}$ (2p var). (6p)

CTH&GU, matematik

Tentamen i matematiska metoder fk, delB, TMA980, 2000-04-26, kl 14.15-18.15**Hjälpmedel:** Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen).Beta. Ej räknedosa.**Telefon:** C-F Stein, tel 0740-459022**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.

Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat!

=====

1. Beräkna $\theta(t) \int_0^t \cosh(a\tau) \cos(at - a\tau) d\tau$ för $a \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$. (4p)

2. Ett kausalt tidskontinuerligt LTI-filter har impulssvaret

$$h(t) = e^{1-t}(1-t)\sin t \theta(t).$$

a) Visa att filtret är stabilt, ange filtrets tillståndsekvation och bestäm filtrets amplitudkaraktistik. (6p)

b) Bestäm svaret på $\sin t$. (2p)

c) Bestäm svaret på $\operatorname{sgn} t + 2\delta(t) + \delta'(t)$. (5p)

d) Visa att $E(y) \leq \frac{e^2}{16} E(x)$ då x är en insignal med ändlig totalenergi $E(x) \left(= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \right)$ och y är svaret på x . (3p)

3. Ett kausalt tidsdiskret LTI-filter har stegsvaret

$$(4 - (3 + (-1)^n)2^{-n})\theta(n) \quad (\text{det är utsignalen då insignalen är } \theta(n)).$$

a) Bestäm filtrets impulssvar och ange filtrets tillståndsekvation. (5p)

b) Visa att filtret är stabilt. (1p)

c) Bestäm filtrets amplitudkaraktistik. (3p)

d) Bestäm utsignalen då insignalen är $x(n) = \cos \frac{n\pi}{2}$. (2p)

e) Bestäm utsignalen då insignalen är $x(n) = \cos \frac{n\pi}{2} \theta(n)$. (5p)

4. Lös problemet
$$\begin{cases} u''_{xx} = u''_{tt}, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < t \\ u(0,t) = u'_x(\frac{\pi}{2},t) = u'_t(x,0) = 0. \\ u(x,0) = \delta(x - \frac{\pi}{4}) + \theta(x - \frac{\pi}{4}) \end{cases} \quad (7p)$$

5. a) Definiera "distribution" och visa att $\overset{\text{Fourier}}{\delta} \supset 1$. (4p)

b) Visa $f = f * \delta$. (2p)

c) Visa $e^{-at} f(t) \overset{\text{Laplace}}{\supset} F(s+a)$. (1p)

BB

Tentamen i matematiska metoder, fk, delB, TMA980, 1999-12-17, kl 14.15-18.15

Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.

Telefon: Johan Ivarsson, tel 0740-459022

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat !

=====

1. Bestäm $f(t)$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ då $\hat{f}(\omega) = \frac{12}{(1 + j\omega)^6 e^{2j\omega}}$. (4p)

2. Ett kausalt tidskontinuerligt LTI-filter har överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 2}.$$

a) Visa att filtret är stabilt och bestäm filtrets impulssvar. (4p)

b) Ange filtrets tillståndsekvation. (1p)

c) Rita filtrets amplitudkaraktistik. (2p)

d) Bestäm svaret på $\sin(\sqrt{2}t)$. (2p)

e) Bestäm svaret på $\sin(\sqrt{2}t)\theta(t)$. (5p)

f) Visa att $E(y) \leq 2E(x)$ då x är en insignal med ändlig totalenergi $E(x)$ och y svaret på x . (3p)

3. Ett kausalt diskret LTI-filter har tillståndsekvationen

$$y(n-2) + 2y(n-1) + 2y(n) = 2x(n-1).$$

a) Bestäm filtrets impulssvar och filtrets frekvenssvar. (6p)

b) Visa att filtret är stabilt. (2p)

c) Bestäm svaret på $\cos \frac{n\pi}{2}$. (2p)

4. Lös problemet
$$\begin{cases} (y(n+2) + 2y(n+1) - 3y(n))\theta(n) = 2\cos(n\pi)\theta(n) \\ y(0) = 0, y(1) = -1, y(n) = 0 \text{ då } n < 0 \end{cases}.$$
 (5p)

5. Lös problemet
$$\begin{cases} u''_{xx} = \frac{1}{2}u'_t, & 0 < x < \pi, 0 < t \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, u(x,0) = \pi - x \end{cases}.$$
 (6p)

6. a) Definiera "distribution" och visa att $\theta' = \delta$. (5p)

b) Visa $x_N = x * \delta_N$ för diskreta signaler x ($N \in \mathbb{Z}$). (2p)

c) Visa att $e^{-|t|} * \sin(t) = \sin(t)$. (1p)

Tentamen i matematiska metoder, fk, delB, TMA980, 1999-08-17, kl 8.45-12.45**Hjälpmedel:** Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.**Telefon:****OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.

Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill harättat !

=====

LTI-filter = linjärt, tidsinvariant filter

1. a) Beräkna $(\cosh(t)\theta(t)) * (\cos(t)\theta(t))$. (3p)

b) Beräkna $(a^n\theta(n)) * (b^n\theta(n))$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Svaret skall ges utan Σ -tecken. (3p)

2. Ett LTI-filter har amplitudkaraktistiken $A(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}$

och faskaraktistiken $\Phi(\omega) = -2 \arctan \omega$.

a) Bestäm filtrets impulssvar och visa att filtret är kausalt och stabilt.

Ange filtrets tillståndsekvation. (6p)

b) Bestäm svaret på $\cos t$. (2p)

c) Bestäm svaret på $\cos(t)\theta(t)$. (4p)

d) Bestäm svaret på $(1+t)e^t\theta(-t)$. (4p)

3. Ett diskret LTI-filter har impulssvaret $h(n) = \left(\frac{-1}{3}\right)^n \theta(n)$.

a) Visa att filtret är kausalt och stabilt. Ange filtrets tillståndsekvation. (3p)

b) Bestäm svaret på $\cos \frac{n\pi}{2}$. (3p)

c) Bestäm svaret på $\cos(\frac{n\pi}{2})\theta(n)$. (5p)

4. Lös problemet
$$\begin{cases} u''_{xx} = u''_{tt} + u'_t, & 0 < x < \pi, 0 < t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = u(x,0) = 0, & u'_t(x,0) = x \end{cases}$$
 (7p)

5. a) Visa $\delta \stackrel{\text{Fourier}}{\supset} 1$. (3p)

b) Härled Plancherels formler. (4p)

c) Visa $tf(t) \stackrel{\text{Laplace}}{\supset} -F'(s)$. (2p)

d) Vad menas med att ett filter är tidsinvariant? (1p)

Tentamen i matematiska metoder E, fk, del B, TMA980, 1998-08-18, kl 8.45-13.45

Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, skall lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.

Telefon:

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.

Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat !!!

=====

1. Lös för $t > 0$ funktionerna $x(t), y(t), z(t)$ ur systemet

$$\begin{cases} x' + y + z = 0 \\ x - y' - z = 0, \quad x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0. \\ x + y + z' = 0 \end{cases} \quad (6p)$$

2. Ett kausalt filter har tillståndsekvationen $y'' + 3y' + 2y = 3x$.

a) Är filtret stabilt? (2p)

b) Visa att $|A(\omega)| \leq \frac{3}{2}$ och rita $A(\omega)$:s graf (4p)
[$A(\omega)$ är filtrets amplitudkaraktistik].

c) Hur stor del av impulssvarets totala energi ligger i bandet $|\omega| \leq \sqrt{3}$? (4p)

d) Bestäm utsignalen, då insignalen är $\cos(\sqrt{2}t)$, resp $\cos(\sqrt{2}t)\theta(t)$, resp $\cos(\sqrt{2}t)\theta(-t)$ [3p+4p+1p]. (8p)

e) Bestäm en insignal, då utsignalen är $e^{-|t|} * (e^{-t}\theta(t))$. (4p)

3. Beräkna $e^{-|t|} * (e^{-t}\theta(t))$. (4p)

4. Lös problemet $\begin{cases} u_{xx} = \frac{1}{4}u_t', & 0 < x < 4, 0 < t \\ u(0,t) = u(4,t) = 0, & u(x,0) = \delta(x-1) + \delta''(x-3) \end{cases}$. (7p)

5. a) Visa att ett linjärt, tidsinvariant filter är ett faltningsfilter $x \mapsto x * h$. (5p)

b) Visa att $f' = f * \delta'$. (2p)

6. Definiera "distribution" och "svag konvergens". (4p)

BB

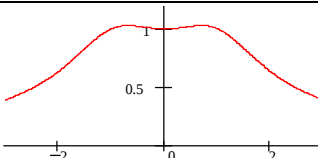
mat. met. E2, fk, del B, gamla tentor, svar (00)**00-08-15**

- 1) $\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)e^{-t} - \theta(t)$ 2a) $y''' + 3y'' + 6y' + 4y = x'' + 2x$ b) $\frac{1}{26}(\sin t - 5\cos t)$
 c) $\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-t}\sin(\sqrt{3}t)\theta(t)$ d) $7e^t\theta(-t) - 3\delta(t) - \delta'(t)$ 3a) $-1 < b < 2$
 b) $y(n-4) + y(n-2) + 2y(n) = x(n-2)$, $A(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{6+6\cos 2\varphi+4\sin 4\varphi}}$ c) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}\right)$
 5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 4n\pi e^{-4(t+t^3)n^2\pi^2} \sin(2n\pi x)$

00-04-26

- 1) $a=0: t\theta(t)$, $a \neq 0: \frac{1}{2a}(\sinh at + \sin at)\theta(t)$ 2a) $(D^2 + 2D + 2)^2 y = eD^2 x$, $A(\omega) = \frac{e\omega^2}{4+\omega^4}$
 b) $\frac{e}{25}(3\sin t + 4\cos t)$ c) $e^{1-t}(\cos t - \sin t)\theta(t)$ 3c) $\frac{12}{\sqrt{25-16\cos^2 \varphi}}$ d) $\frac{12}{5}\sin\frac{n\pi}{2}$
 b) $3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)\theta(n)$, $4y(n) - y(n-2) = 12x(n-1)$ e) $\frac{3}{5}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{-1}{2}\right)^n + 4\sin\frac{n\pi}{2}\right)\theta(n)$
 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \left(\sin\frac{(2n+1)\pi}{4} + \frac{\cos\frac{(2n+1)\pi}{4}}{2n+1} \right) \cos((2n+1)t) \sin((2n+1)x)$

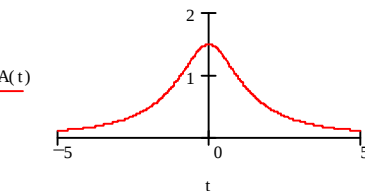
9-12-17

- 1) $f(t) = \frac{1}{10}(t-2)^5 e^{2-t}\theta(t-2)$, $\int_0^{\infty} f(t)dt = 12$ 2c) 
 2a) $e^{-t}(\sin t + \cos t)\theta(t)$ b) $y'' + 2y' + 2y = x' + 2x$
 d) $\frac{1}{2}\sin\sqrt{2}t - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}t$ e) $\left(\frac{1}{2}\sin\sqrt{2}t - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\cos t\right)\theta(t)$
 3) $h(n) = 2^{1-\frac{n}{2}}\sin\frac{3\pi n}{4}\theta(n)$, $H(e^{j\alpha}) = \frac{2(2+3\cos\alpha-j\sin\alpha)}{5+12\cos\alpha+2\cos 2\alpha}$ c) $\frac{2}{5}\left(\sin\frac{n\pi}{2} + 2\cos\frac{n\pi}{2}\right)$
 4) $\frac{(-1)^n}{2}(3^n - 1)\theta(n)$ 5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{1+2n} \left(1 - \frac{2(-1)^n}{(1+2n)\pi}\right) e^{-\frac{1}{2}(1+2n)^2 t} \sin\left(\frac{1}{2}(1+2n)x\right)$

99-08-17

- 1a) $\frac{1}{2}(\sinh t + \sin t)\theta(t)$ b) $(n+1)a^n\theta(n)$ om $a=b$, $\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\theta(n)$ om $a \neq b$
 2a) $h(t) = 2te^{-t}\theta(t)$, tillst.ekv: $y'' + 2y' + y = 2x$ b) $\sin t$ c) $(\sin t - te^{-t})\theta(t)$ d) $\frac{1}{2}te^{-|t|}$
 3a) $y(n-1) + 3y(n) = 3x(n)$ b) $\frac{1}{10}(9\cos\frac{n\pi}{2} - 3\sin\frac{n\pi}{2})$ c) $\frac{1}{10}(9\cos\frac{n\pi}{2} - 3\sin\frac{n\pi}{2} + (-\frac{1}{3})^n)\theta(n)$
 4) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}e^{-\frac{t}{2}}}{n\sqrt{4n^2-1}} \sin\left(\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}t\right) \sin(nx)$

98-08-18

- 1) $x(t)=1$, $y(t)=e^t-1$, $z(t)=1-e^t$ ($t>0$),
 2a) ja c) $\frac{2}{3\pi}(2\pi - 3\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}) \approx 88\%$, b) 
 e) $\frac{1}{3}(2e^{-|t|} - \operatorname{sgn} t e^{-|t|})$
 d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)$, $(e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t))\theta(t)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\theta(-t) - (e^{-2t} - e^{-t})\theta(t)$
 3) $\frac{1}{2}e^{-|t|} + te^{-t}\theta(t)$ 4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) - \left(\frac{k\pi}{4}\right)^2 \sin\left(\frac{3k\pi}{4}\right) \right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{4}t} \sin\left(\frac{k\pi}{4}x\right)$