Datorlaborationer i matematiska metoder E2, fk, del B (TMA980), ht 2000

- Denna laboration är ej obligatorisk. Den består av fyra uppgifter som kan ge en bonuspoäng var vid tentamina i matematiska metoder för E2, fk, del B, 15/12-00, 18/4-01 och 21/8-01. Uppg. 1 skall göras läsvecka 2/3, uppg. 2 lv 4/5, upp. 3 och 4.1 lv 6/7 och uppg. 4.2 lv 7.
- Laborationen skall lämnas in till mig vid två tillfällen:
  uppg.1 och uppg.2 senast on, 22/11, kl. 9^{45} (efter föreläsningen),
  uppg.3 och uppg.4 senast fr, 8/12, kl. 9^{45} (efter föreläsningen).
  Häfta ihop lösningarna, skriv namn och personnummer längst upp på varje inlämnat blad, på blad 1 med *maple*, på övriga blad med *maple* eller för hand, blad utan namn eller utan personnummer beaktas ej. Laborationen lämnas tillbaka med tentan.

Syfte

Du skall lära dig att utnyttja datorn i denna kurs för att utföra beräkningar och visualisera dina resultat och därmed öka förståelsen. De tar upp:

- Spektral avskärning: hur bra approximerar F-serien resp. F-integralen funktionen?
- Laplace-, Fourier, z-transformation: beräkning, amplitudspektrum, energi, tillämpning på filter (lösning av begynnelsevärdesproblem, stabilitet, sinustest), faltning.
- Ortogonalserier.

Uppgift 1

Denna uppgift behandlar Laplacetransformation och Fouriertransformation. Du skall lära dig att transformera (och lösa BV-problem) med maple och se hur bra F-serien (F-integralen) approximerar en funktion, även θ och δ!

a) Impulståget $u(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-m)$ har Fourierserien $\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j2n\pi t}$. Rita delsummorna $\sum_{n=-N}^{N}e^{j2n\pi t}$ för $N=12$ och för $N=202$ i var sitt diagram ($-1<t<7.5$).

b) Rita den spektrala avskärningen $\theta_\Omega(t)$ av $\theta(t)$ för $\Omega=12\pi$ och för $\Omega=2000$ i samma diagram ($-1<t<1$).

c) Rita den spektrala avskärningen $\delta_\Omega(t)$ av $\delta(t)$ för $\Omega=12\pi$ och för $\Omega=37\pi$ i var sitt diagram ($-2<t<2$).

d) Laplacetransformera $\left(\frac{\sin(2x)}{x}-\frac{\sinh(2x)}{x}\right)\theta(x)$, inverstransformera $\frac{s^2+s+2}{(s+1)^2\left(s^2+1\right)}$.
Lös (DE) $3y'''-2y''+9y'-6y=\theta(t-1)-\theta(t-2)$.

e) Fouriertransformera $f(x)=\frac{\sin(2x)}{x}e^{-|x|}$, rita $f(x)$ och den spektrala avskärningen $f_\Omega(x)$ av f för $\Omega=4\pi$ i samma diagram ($-2<x<2$).

Uppgift 2

Denna uppgift behandlar tidskontinuerliga filter. Du skall öva in begreppen filter, frekvensöverföringsfunktion, amplitudkarakteristik, överföringsfunktion, kausalitet, stabilitet (pol), sinussvar (transienter)...

Ett kausalt filter S_1 har tillståndsekvationen $P(D)y = Q(D)x$ med $P(D) = D^4 + 5D^3 + 12D^2 + 16D + 8$ och $Q(D) = 10D + 11$.

a) Bestäm filtrets impulssvaret h_1 och filtrets stegsvar J.
b) Är filtret stabilt?
c) Rita filtrets amplitudkarakteristik för $|\omega| < 9$ och beskriv filtret.
d) Vilket filter fås om man ersätter $Q(D)$ med $Q_1(D) = 10D^4 + 11$?
e) Bestäm svaret på $\sin\frac{t}{\sqrt{2}}$ och på $\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\,\theta(t)$ och rita dessa svar för $-1 < t < 6$ i samma diagram.
f) Bestäm $y(t)$ = svaret på $x(t) = e^{-|t|}\cos 2t$ och rita $x(t)$ och $y(t)$ för $-6 < t < 6$ i samma diagram.
g) Man seriekopplar S_1 med ett kausalt LTI-filter S_2 som har överföringsfunktionen $H_2(s) = \frac{2s^8+10s^7-31s^6-243s^5-584s^4-580s^3+280s^2+960s+480}{10s^6+101s^5+889s^4+4169s^3+9400s^2+9887s+3894}$ och får då ett kausalt LTI-filter S. Visa att S är stabilt, beräkna och rita dess amplitudkarakteristik och beräkna dess impulssvar (explicit, koefficienterna med 3 decimaler).

Anvisningar, ledningar, tips

Allmänt

Förbered dig innan du sätter dig vid datorn, skriv ner det du vill göra med datorn. Gå igenom mina exempel först. Försök även att lösa uppgifterna så långt det går för hand (*maple* kontrollräknar). Läs uppgiftstexten noggrant (t.ex. "rita i samma plot" eller "i var sitt plot"), kommentera, svara på frågorna! Kolla rimligheten av resultaten!!

- För beräkning av Laplace- resp. Fourier-transform och deras inversa transformer laddas integral-transformations-paketet in (*with*(*inttrans*)).
- Litteraturtips: *R.B.Israel*: Calculus: The Maple Way (Addison-Wesley,1996) och *E.Pärt-Enander/A.Sjöberg*: Användarhandledning för MATLAB (Uppsala univ., 1998)

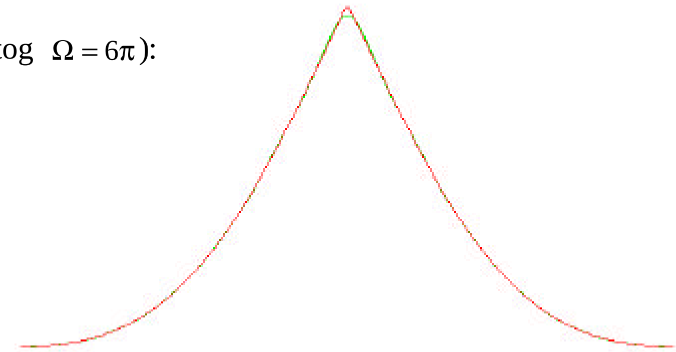
Till uppgift 1

a) Utnyttja $\sum_{n=-N}^{N} e^{jn\Omega t} = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\Omega t}{\sin\frac{\Omega}{2}t}$ (sid. 3:29, se även appendix A1.1), se ex1.

b),c) $\theta_\Omega(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(\Omega t), \delta_\Omega(t) = \frac{\sin(\Omega t)}{\pi t}$ (sid. 4:28 resp. sid. 4:29). Se slutet av ex3.

d) *Maple* kan räkna med δ (= *Dirac*) och θ (= *Heaviside*), se ex2. Differentialekvationer löser man m.h.a. Laplacetransformation genom att välja *method = laplace*; räkna med godt. $y(0) = a, y'(0) = b, y''(0) = c$! Se ex2.

e) Följ ex3: för att kunna beräkna (numeriskt) och rita den spektrala avskärningen skall du beräkna imaginärdelen av integranden $\hat{f}(\omega)e^{j\omega t}$ (med *Im*, *evalc* och *simplify*) och därmed motivera att den är udda (ej trivialt, bevis krävs), sedan beräknar du realdelen och motiverar att den är jämn, alltså är $f_\Omega(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\Omega Re\left(\hat{f}(\omega)e^{j\omega x}\right)d\omega$. Har du lyckats får du följande graph som visar hur bra denna approximation är (jag tog $\Omega = 6\pi$):



Till uppgift 2

Följ ex4, där finns alla nödvändiga tips.

b) Glöm ej att kolla att $grad(nämnare) \geq grad(täljare)$!

e) Sinussvaret skall du kunna (skall ej beräknas med Fouriertransform!).

f) Här går det med $\hat{h}(\omega) = H(j\omega)$ (enklare än mitt ex). Glöm ej *evalc* för att kunna rita!

g) Här får du hela motiveringen (och ett delsvar): seriekopplingen mellan filtret S_1 och filtret S_2 är filtret $S = S_2 \circ S_1$: $x \mapsto (x * h_1) * h_2 = x * (h_1 * h_2)$, alltså har S impulssvaret $h = h_1 * h_2$ och överföringsfunktionen $H = H_1 H_2$ ($= \frac{2s^4 - 55s^2 + 60}{s^5 + 9s^4 + 79s^3 + 330s^2 + 577s + 354}$). Räknigarna (beräkna och rita $A(\omega)$) skall göras exakt, för att "se" h skall du räkna med flyttal eller skriva *evalf(%)* efter *invlaplace(H(s),s,t)*, se ex4c.

Lycka till !

Bernhard

oktober 2000