Datorlaborationer i matematiska metoder E2, fk, del B (TMA980), ht 2000

- Upp. 3 och 4.1 skall göras läsvecka lv 6/7 och uppg. 4.2 lv 7.
- Laborationen skall lämnas till mig senast fr, 8/12, kl. 9^{45} (efter föreläsningen).
  Häfta ihop lösningarna, skriv namn och personnummer längst upp på varje inlämnat blad, på blad 1 med *maple*, på övriga blad med *maple* eller för hand, blad utan namn eller utan personnummer beaktas ej. Laborationen lämnas tillbaka med tentan.

Uppgift 3

Uppgifterna 3 och 4.1 behandlar tidsdiskreta filter och differensekvationer. Du skall öva in begreppen z-transform, filter, frekvenssvar (sinussvar), amplitudkarakteristik, överföringsfunktion, kausalitet, stabilitet (pol), differensekvation (rekurrensekvation) mm, i uppg. 4.1 skall du dessutom även träna litet MATLAB.

Ett kausalt diskret LTI-filter har överföringsfunktionen $H(z)=\frac{96z^4-260z^3+37z^2-41z}{144z^4-84z^3-30z^2+33z-18}$.

a) Är filtret stabilt? Rita enhetscirkeln och polerna.
b) Beräkna filtrets impulssvar h och rita $h(n)$ för $0 \le n \le 11$.
c) Rita filtrets amplitudkarakteristik $\left|H\left(e^{j\alpha}\right)\right|$ för $|\alpha| < \pi$.
d) Bestäm svaret på $\sin\frac{n\pi}{4}$ och på $\sin\frac{n\pi}{4}\theta(n)$ och rita dessa svar för $-2 \le n \le 19$ i samma diagram.

Uppgift 4.1

Ett kausalt diskret LTI-filter ges av tillståndsekvationen
$13y(n)-12y(n-1)+11y(n-2)-10y(n-3)+9y(n-4)-8y(n-5)=2x(n-4)+x(n-5)$.

a) Bestäm impulssvaret h med *maple* och rita $h(n)$ för $n = 0\ldots16$.
b) Bestäm impulssvaret h med MATLAB och rita $h(n)$ för $n = 0\ldots16$.
c) Lös differensekvationen
$13y(n)-12y(n-1)+11y(n-2)-10y(n-3)+9y(n-4)-8y(n-5)=0$
med begynnelsevillkoren $y(0)=y(1)=y(2)=0,\ y(3)=\frac{2}{13},\ y(4)=\frac{37}{169}$
och bestäm överföringsfunktionen med hjälp härav.

Uppgift 4.2

Denna uppgift behandlar Legendrepolynom, ett (viktigt) exempel på ortogonal-system. Uppgiften skall bl.a. visa dig att man får en bättre approximation m.a.p. en ON-bas (Legendre-polynom) än m.a.p en annan bas (polynom $1, x, x^2, x^3, \cdots$).

Beräkna ett polynom P av grad högst 6 så att felet $\int_{-1}^{1}(P(x)-\sin(\pi x))^2\,dx$ blir minimalt. Rita $P(x)$, $\sin(\pi x)$ och Mclaurinpolynomet av grad 6 till $\sin(\pi x)$ för $|x| \le 1$ så att man ser bra skillnaden mellan dem.

Anvisningar, ledningar, tips

Förbered dig innan du sätter dig vid datorn, skriv ner lösningarna (det du vill göra med datorn). Gå igenom mina exempel först. Försök även att lösa uppgiften så långt det går för hand (*maple* kontrollräknar). Kommentera, svara på frågorna! Kolla rimligheten av resultaten!!

För beräkning av *z*-transform och invers *z*-transform behöver du inte ladda in något. Den diskreta enhetspulsen i punkten N, dvs. $\delta_N(n) = \delta(n-N)$, fås med *charfcn[N]* (*characteristic function of* $\{N\}$), enhetssteget är *Heaviside*, men skapa helst själv dessa funktioner så att *maple* ritar dem även i origo, t.ex. så här: $puls := n -> piecewise(n = 0,1)$ och $steg := n -> piecewise(n >= 0,1)$. Tänk på att *maple* bara räknar med ensidig *z*-transform, du måste alltså lägga till faktorn $\theta(n)$….Skapa en *.m*-fil som ritar diskreta signaler såsom du tycker bäst, se ex.5a. Försök att förenkla svaren (*h*, sinussvar…), pröva med *evalc*, *combine*, *convert*(…,*radical*), *convert*(…,*sincos*), *simplify*, mm. Om inget hjälper ta *evalf*. Se mina ex.!

3a) Visa att polerna ligger innanför enhetscirkeln, rita även med *maple* eller med MATLAB.

b) Rätt (?) impulssvar är $h(n) = \left(\left(\frac{-2}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2^n}\right)\theta(n)$.

c) Kommentera (filtrets typ??).

4.1a) Som i uppg.3 (bestäm *H*, inverstransformera…), b) Se mitt MATLAB-exempel.

c) Du får samma svar (*h*), men "oläsbart", jämför dock värdena för *n* = 0…5 med *maples* och med MATLAB's svar i ab); observera att *maple* börjar med 1. Du får H som "genererande funktion" (svar: $\frac{2z+1}{13z^5-12z^4+11z^3-10z^2+9z-8}$), se mitt maple-exempel 5b).

4.2 Utveckla i *Legendre*-polynom, beräkna koefficienterna med *maple*. Utnyttja ”udda”!! Legendre-polynom finns i *maple*: Ladda in paketet ”ortogonala polynom” (*with*(*orthopoly*)), skriv sedan bara *P*(*n*,*x*), då får du Legendrepolynomet av grad *n* (i variabeln *x*). Kom ihåg Taylorutvecklingen (*taylor*(…)), polynomet (som kan ritas) får du sedan med *convert*. Rita de tre funktionerna i samma diagram! Se tenta 96-08-20 uppg.3 (med lösning!). Observera att utvecklingen m.a.p egenfunktionerna (ON-systemet) *P*(*n*,*x*) ger en mycket bättre (snabbare) approximation, men f.f.a kan ju även icke deriverbara funktioner utvecklas som t.ex. $|x|$, $|\sin(x)|$, $\sin(x)\theta(x)$….

ANMÄRKNING:
Fibonacci-talen finns i maple i kombinatorik-paketet som laddas in med *with*(*combinat*);
kolla t.ex. $F_0 = 1, F_1 = 2, F_{39} = 102334155$ som fås som >*combinat*[*fibonacci*](40);
observera igen att *maple* börjar numreringen med 1.
Titta vad snabbt de växer: F_{299} = fibonacci(300);
222232244629420445529739893461909967206666939096499764990979600

LYCKA TILL

Bernhard

MATLAB-EXEMPEL

Vi betraktar (det hemska) filtret från exemplet5a (se exempel5b i *maple*, sid 5):
Filtret har tillståndsekvationen

$$432y(n)-216y(n-1)-180y(n-2)+166y(n-3)-58y(n-4)+10y(n-5)=$$
$$=432x(n)+\left(72\sqrt{3}-792\right)x(n-1)+\left(192-12\sqrt{3}\right)x(n-2)-\left(48+42\sqrt{3}\right)x(n-3)+\left(15\sqrt{3}-8\right)x(n-4)\,:$$

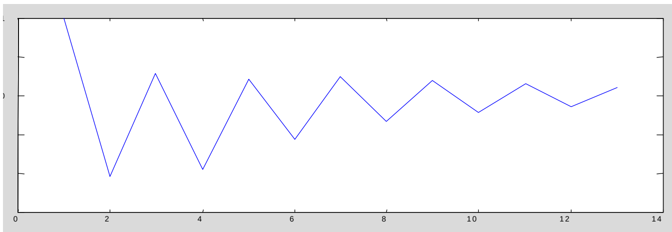
Skriv in koefficienterna framför y (polynomet P) som vektor A, koefficienterna framför x (polynomet Q) som vektor B och insignalen x som vektor X, då fås lösningen Y med >Y = *filter*(B,A,X). Y kan sedan plottas (med *stem*, som vanlig "linje-graf", som punkter, eller som lodräta sträckor med *bar*). Vi vill beräkna impulssvaret för n = 0…13, stoppar alltså in vektorn X = [1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]:

```
A=[432 -216 -180 166 -58 10]
B=[432 72*sqrt(3)-792 192-12*sqrt(3) -48-42*sqrt(3) -
8+15*sqrt(3) 0]
X=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
Y=filter(B,A,X)
```

```
A =
   432   -216   -180    166    -58     10
B =
  432.0000 -667.2923  171.2154 -120.7461   17.9808         0
X =
  Columns 1 through 12
     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
  Column 13
     0
Y =
  Columns 1 through 7
    1.0000   -1.0447    0.2907   -0.9537    0.2216   -0.5617    0.2411
  Columns 8 through 13
   -0.3334    0.2015   -0.2114    0.1517   -0.1400    0.1092
```

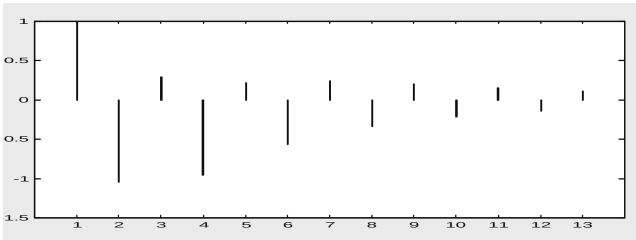
```
plot(Y)
```

Nå det känns ju igen från maple-exemplet:



Eller vi ritar det "diskret":

med `bar(Y,0.01)` :



eller med `stem(Y,'filled')` :