

Tentamen i matematiska metoder fk, del B, TMA980, 2001-08-21, kl. 8.45-12.45

Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.

Telefon: Rolf Liljendal, tel. 0740-459022

OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnr. på varje inlämnat blad.

- =====
1. Ett kausalt tidskontinuerligt filter F har tillståndsekvationen
 $y'' + 2y' + y = 2x'$.
 - a) Motivera varför F är ett stabilt LTI-filter.
Ange även F 's impulssvar och F 's amplitudkaraktistik. (5p)
 - b) Visa att $E(F(x)) \leq E(x)$ då x är en insignal med ändlig
totalenergi $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$. (3p)
 - c) Bestäm $F(\sin(t))$. (2p)
 - d) Bestäm $F(\sin(t)\theta(t))$. (3p)
 - e) Bestäm $F((e^t\theta(-t)) * (e^t\theta(-t)))$. (3p)
 2. Funktionen f har perioden 2π och $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi \\ 1, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$.
 - a) Utveckla f' i Fourierserie. (4p)
 - b) Bestäm en periodisk partikulärlösning till $y'' + 2y' + y = 2f''$. [uppg.1!] (3p)
 3. Beräkna $\left(\frac{a^n}{n!}\theta(n)\right) * \left(\frac{b^n}{n!}\theta(n)\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$. (3p)
 4. I det tidsdiskreta filtret F bildas utsignalens värde som det aritmetiska medelvärdet av insignalens tre senaste värden, dvs.
 $F : x(n) \mapsto y(n) = \frac{1}{3}(x(n-2) + x(n-1) + x(n))$.
 - a) Motivera varför F är ett kausalt, stabilt LTI-filter.
Ange även F 's impulssvar och F 's amplitudkaraktistik. (4p)
 - b) Bestäm $F(\sin(\frac{n\pi}{3}))$. (1p)
 - c) Bestäm $F(\sin(\frac{n\pi}{3})\theta(n))$. (2p)
 - d) Bestäm en insignal som ger utsignalen $7 \cdot 2^n \theta(n) - 3\delta(n) - 2\delta(n-1)$. (3p)
 5. Lös problemet
$$\begin{cases} u''_{xx} = u''_{tt} & \text{för } 0 < x < \pi, 0 < t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{för } t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, u'_t(x,0) = 1 & \text{för } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$
. (6p)
 6.
 - a) Definiera "distribution" och visa att $\delta \stackrel{\text{Fourier}}{\supset} 1$. (4p)
 - b) Visa $e^{j\Omega t} f(t) \stackrel{\text{Fourier}}{\supset} \hat{f}(\omega - \Omega)$ ($\Omega \in \mathbb{R}$). (2p)
 - c) Visa att $x(n-N) \stackrel{z\text{-transform}}{\supset} z^{-N} X(z)$ ($N \in \mathbb{Z}$) för diskreta signaler x . (2p)

Tentamen i matematiska metoder fk, del B, TMA980, 2001-04-18, kl. 14.15-18.15**Hjälpmedel:** Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.**Telefon:** Erik Svensson, tel. 0740-459022**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnr. på varje inlämnat blad.

- =====
- Ett tidskontinuerligt kausalt filter har tillståndsekvationen

$$y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 2x.$$
 - Är filtret stabilt? (2p)
 - Bestäm utsignalen då insignalen är $\sin(t)$. (3p)
 - Bestäm utsignalen då insignalen är $3(t^2 + 2)e^{-t}\theta(t)$. (4p)
 - Visa att $E(y) \leq E(x)$ då x är en insignal med ändlig totalenergi $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ och y är svaret på x . (2p)
 - Funktionen f är jämn, har perioden 8 och för $0 \leq t \leq 4$ är

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 < t < 3 \\ 0, & 3 < t \leq 4 \end{cases}.$$

Beräkna $f'(t)$ för $-2 < t < 4$ och utveckla f' och med hjälp härav f i Fourierserie på cosinus-sinusform. (5p)
 - Visa att ekvationen $y'(t) + 2y(t) + e^{-2t} \int_{-\infty}^t e^{2\tau} y(\tau) d\tau = e^{-2t} \theta(t)$ är en faltningsekvation $y * k = f$ (ange kärnan k) och bestäm en lösning y . (5p)
 - Ett kausalt tidsdiskret LTI-filter har överföringsfunktion $H(z) = \frac{16z^2}{16z^4 - 1}$.

 - Visa att filtret är stabilt och bestäm filtrets impulssvar. (5p)
 - Ange filtrets tillståndsekvation och amplitudkaraktistik. (3p)
 - Bestäm utsignalen då insignalen är $x(n) = \cos \frac{n\pi}{4}$. (2p)
 - Bestäm en följd $a: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ som satisfierar

$$a(n) = 0 \text{ då } n \leq 0,$$

$$a(1) = 1 \text{ och } a(n+2) = a(n+1) - a(n) \text{ då } n \geq 0.$$
 (4p)
 - Lös värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} u''_{xx} = u'_t, & 0 < x < 2, 0 < t \\ u'_x(0, t) = u'_x(2, t) = 0, & u(x, 0) = \delta(x - 1) \end{cases}.$$
 (6p)
 - Definiera distribution och svag konvergens. (4p)
 - Visa att för ett stabilt tidsdiskret LTI-filter F med impulssvaret h gäller att $F(e^{j\alpha n}) = H(e^{j\alpha}) e^{j\alpha n}$. (3p)
 - Visa att $x_N = x * \delta_N$ ($N \in \mathbb{Z}$) för diskreta signaler x . (2p)

Tentamen i matematiska metoder fk, del B, TMA980, 2000-12-15, kl. 14.15-18.15**Hjälpmedel:** Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.**Telefon:** Martin Adiels, tel. 0740-459022**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget.

Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat!

=====

1. Ett tidskontinuerligt LTI-filter har stegsvaret $J(t) = e^{-2t} \cos(\sqrt{2}t) \theta(t)$.
 - a) Bestäm filtrets impulssvar, motivera varför filtret är kausalt och stabilt, ange filtrets tillståndsekvation och bestäm filtrets amplitudkaraktistik. (6p)
 - b) Bestäm svaret på $\sin(\sqrt{2}t)$. (3p)
 - c) Visa att $E(y) \leq E(x)$ då x är en insignal med ändlig totalenergi $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ och y är svaret på x . (2p)
2. Visa att ekvationen $y(t) + \int_0^{\infty} y'(t-\tau) e^{-\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 y'(t-\tau) e^{\tau} d\tau + e^{-|t|}$ är en faltningssekvation $y * k = f$ och bestäm en lösning y . (6p)
3. Ett kausalt tidsdiskret filter har tillståndsekvationen $4y(n) - y(n-2) = 3x(n-1) + 2x(n-2)$.
 - a) Visa att filtret är stabilt. (5p)
 - b) Bestäm filtrets amplitudkaraktistik. (2p)
 - c) Bestäm utsignalen då insignalen är $x(n) = \sin \frac{n\pi}{2}$. (3p)
 - d) Bestäm utsignalen då insignalen är $x(n) = (-1)^n \left(3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \theta(n)$. (4p)
4. Lös problemet $\begin{cases} y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = 0, n \geq 0, \\ y(n) = 0, n < 0, y(0) = y(1) = 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$. (4p)
5. Lös problemet $\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0 \\ u'_y(x, 1) = \delta(x - \frac{1}{2}) \end{cases}$. (6p)
6.
 - a) Visa att $\theta' = \delta$. (3p)
 - b) Visa att för ett stabilt tidskontinuerligt LTI-filter F med impulssvaret h gäller att $F(e^{j\omega t}) = \hat{h}(\omega) e^{j\omega t}$. (3p)
 - c) Visa att $\sin(bt) \stackrel{\text{Laplace}}{\supset} \frac{b}{s^2 + b^2}$. (3p)

CTH&GU, matematik

Tentamen i matematiska metoder, fk, delB, TMA980, 1999-08-17, kl 8.45-12.45**Hjälpmedel:** Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.**Telefon:****OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat !

=====

1. a) Beräkna $(\cosh(t)\theta(t)) * (\cos(t)\theta(t))$. (3p)

b) Beräkna $(a^n\theta(n)) * (b^n\theta(n))$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Svaret skall ges utan Σ -tecken. (3p)

2. Ett LTI-filter har amplitudkaraktistiken $A(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}$

och faskaraktistiken $\Phi(\omega) = -2 \arctan \omega$.

a) Bestäm filtrets impulssvar och visa att filtret är kausalt och stabilt.

Ange filtrets tillståndsekvation.

(6p)

b) Bestäm svaret på $\cos t$.

(2p)

c) Bestäm svaret på $\cos(t)\theta(t)$.

(4p)

d) Bestäm svaret på $(1+t)e^t\theta(-t)$.

(4p)

3. Ett diskret LTI-filter har impulssvaret $h(n) = \left(\frac{-1}{3}\right)^n \theta(n)$.

a) Visa att filtret är kausalt och stabilt. Ange filtrets tillståndsekvation.

(3p)

b) Bestäm svaret på $\cos \frac{n\pi}{2}$.

(3p)

c) Bestäm svaret på $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\theta(n)$.

(5p)

4. Lös problemet
$$\begin{cases} u''_{xx} = u''_{tt} + u'_t, & 0 < x < \pi, 0 < t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = u(x,0) = 0, & u'_t(x,0) = x \end{cases}$$
 (7p)

5. a) Visa $\delta \stackrel{\text{Fourier}}{\supset} 1$.

(3p)

b) Härled Plancherels formler.

(4p)

c) Visa $tf(t) \stackrel{\text{Laplace}}{\supset} -F'(s)$.

(2p)

d) Vad menas med att ett filter är tidsinvariant?

(1p)

Tentamen i matematiska metoder E, fk, del B, TMA980, 1998-08-18, kl 8.45-13.45**Hjälpmedel:** Formelsamling (delas ut, skall lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.**Telefon:****OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.

Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat !!!

=====

1. Lös för
- $t > 0$
- funktionerna
- $x(t), y(t), z(t)$
- ur systemet

$$\begin{cases} x' + y + z = 0 \\ x - y' - z = 0, \quad x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0. \\ x + y + z' = 0 \end{cases} \quad (6p)$$

2. Ett kausalt filter har tillståndsekvationen
- $y'' + 3y' + 2y = 3x$
- .

a) Är filtret stabilt? (2p)

b) Visa att $|A(\omega)| \leq \frac{3}{2}$ och rita $A(\omega)$:s graf (4p)
[$A(\omega)$ är filtrets amplitudkaraktäristik].c) Hur stor del av impulssvarets totala energi ligger i bandet $|\omega| \leq \sqrt{3}$? (4p)d) Bestäm utsignalen, då insignalen är $\cos(\sqrt{2}t)$, resp $\cos(\sqrt{2}t)\theta(t)$, resp $\cos(\sqrt{2}t)\theta(-t)$ [3p+4p+1p]. (8p)e) Bestäm en insignal, då utsignalen är $e^{-|t|} * (e^{-t}\theta(t))$. (4p)

3. Beräkna
- $e^{-|t|} * (e^{-t}\theta(t))$
- . (4p)

4. Lös problemet
- $$\begin{cases} u''_{xx} = \frac{1}{4}u'_t, & 0 < x < 4, 0 < t \\ u(0,t) = u(4,t) = 0, & u(x,0) = \delta(x-1) + \delta''(x-3) \end{cases} \quad (7p)$$

5. a) Visa att ett linjärt, tidsinvariant filter är ett faltningsfilter
- $x \mapsto x * h$
- . (5p)

b) Visa att $f' = f * \delta'$. (2p)

6. Definiera "distribution" och "svag konvergens". (4p)

mat. met. E2, fk, del B, gamla tentor, svar (01)**01-08-21**

1a) $2(1-t)e^{-t}\theta(t), \frac{2|\omega|}{1+\omega^2}$ c) $\sin t$ d) $(\sin t - te^{-t})\theta(t)$ e) $-2te^{-|t|}$

2a) $-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cos((2k+1)t)$ b) $-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(2k+1)}{(1+2k+2k^2)\pi} \cos((2k+1)t - \arctan \frac{2k(k+1)}{2k+1})$ 3) $\frac{(a+b)^n}{n!} \theta(n)$

4a) $h(n) = \frac{1}{3}(\delta(n-2) + \delta(n-1) + \delta(n))$, $A(\alpha) = \frac{1}{3}\sqrt{3+2(\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha)}$

b) $y(n) = \frac{1}{3}(\sin \frac{n\pi}{3} - \sqrt{3} \cos \frac{n\pi}{3})$ c) $y(n) = 0$ för $n \leq 0$, $y(1) = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $y(n) = \frac{1}{3}(\sin \frac{n\pi}{3} - \sqrt{3} \cos \frac{n\pi}{3})$ för $n \geq 2$

d) $x(n) = 12 \cdot 2^n \theta(n)$ 5) $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2 \pi} \sin((2n+1)t) \sin((2n+1)x)$

01-04-18

1a) ja b) $-\frac{1}{5}(\sin t + 3\cos t)$ c) $2te^{-t}\theta(t)$ 2) $f'(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1) - \delta(t-3)$, $-2 < t < 4$,

$f'(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \sin((2k+1)\frac{\pi}{4}) \sin((2k+1)\frac{\pi}{4}t)$, $f(t) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\sin((2k+1)\frac{\pi}{4})}{(2k+1)\pi} \cos((2k+1)\frac{\pi}{4}t)$ 3) $e^{-2t} \sin t \theta(t)$

4a) $h(n) = 16^{-m}$ då $n = 4m+1$, $m \geq 1$, $h(n) = 0$ annars b) $y(n-4) - 16y(n) = -16x(n-2)$,

$A(\alpha) = \frac{16}{\sqrt{257-32\cos 4\alpha}}$ c) $\frac{16}{17} \sin \frac{n\pi}{4}$ 5) $a(n) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3} \theta(n)$ 6) $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 t} \cos(n\pi x)$

00-12-15

1a) $h(t) = \delta(t) - (2e^{-2t} \cos \sqrt{2}t + \sqrt{2}e^{-2t} \sin \sqrt{2}t)\theta(t)$, $A(\omega) = |\omega| \sqrt{\frac{\omega^2+4}{\omega^4+16\omega^2+36}}$

b) $\frac{1}{6} \sin \sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{3} \cos \sqrt{2}t$ 2) $y(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{\sqrt{3}}}$ 3b) $\sqrt{\frac{13+12\cos \alpha}{17+8\cos^2 2\alpha}}$ c) $-\frac{1}{5}(2\sin \frac{n\pi}{2} + 3\cos \frac{n\pi}{2})$

d) $(2^{-n} - (-1)^n)\theta(n)$ 4) $(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4} \theta(n)$ 5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(1+2n)\pi \cosh((1+2n)\pi)} \sinh((1+2n)\pi y) \sin((1+2n)\pi x)$

99-08-17

1a) $\frac{1}{2}(\sinh t + \sin t)\theta(t)$ b) $(n+1)a^n \theta(n)$ om $a = b$, $\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \theta(n)$ om $a \neq b$

2a) $h(t) = 2te^{-t}\theta(t)$, tillst.ekv: $y'' + 2y' + y = 2x$ b) $\sin t$ c) $(\sin t - te^{-t})\theta(t)$ d) $\frac{1}{2}te^{-|t|}$

3a) $y(n-1) + 3y(n) = 3x(n)$ b) $\frac{1}{10}(9\cos \frac{n\pi}{2} - 3\sin \frac{n\pi}{2})$ c) $\frac{1}{10}(9\cos \frac{n\pi}{2} - 3\sin \frac{n\pi}{2} + (-\frac{1}{3})^n)\theta(n)$

4) $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1} e^{-\frac{t}{2}}}{n\sqrt{4n^2-1}} \sin\left(\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}t\right) \sin(nx)$

98-08-18

1) $x(t) = 1$, $y(t) = e^t - 1$, $z(t) = 1 - e^t$ ($t > 0$),

2a) ja c) $\frac{2}{3\pi}(2\pi - 3\arctan \frac{\sqrt{3}}{2}) \approx 88\%$,

e) $\frac{1}{3}(2e^{-|t|} - \operatorname{sgn} t e^{-|t|})$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t)$, $(e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t))\theta(t)$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t)\theta(-t) - (e^{-2t} - e^{-t})\theta(t)$

3) $\frac{1}{2}e^{-|t|} + te^{-t}\theta(t)$ 4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) - \left(\frac{k\pi}{4}\right)^2 \sin\left(\frac{3k\pi}{4}\right) \right) e^{-\frac{k^2 \pi^2}{4}t} \sin\left(\frac{k\pi}{4}x\right)$

