Datorlaborationer i matematiska metoder E2, fk, del B (TMA980), ht 2001

- Denna laboration är ej obligatorisk. Den består av fyra uppgifter som kan ge en bonuspoäng var vid tentamina i matematiska metoder, fk, del B, 21/12-01, 3/4-02 och 20/8-02.
  Uppg. 1 skall göras läsvecka 2/3, uppg. 2 lv 4/5, upp. 3 och 4.1 lv 6/7 och uppg. 4.2 lv 7.
- Laborationen skall lämnas in till mig vid två tillfällen:
  uppg.1 och uppg.2 senast on, 28/11, kl. 9^{45} (efter föreläsningen),
  uppg.3 och uppg.4 senast fr, 8/12, kl. 9^{45} (efter föreläsningen).
  Häfta ihop lösningarna, skriv namn och personnummer längst upp på varje inlämnat blad, på blad 1 med *maple*, blad utan namn eller utan personnummer beaktas ej. Laborationen lämnas tillbaka med tentan.

Syfte

Du skall lära dig att utnyttja datorn i denna kurs för att utföra beräkningar och visualisera dina resultat och därmed öka förståelsen. Laborationen tar upp:

- Spektral avskärning: hur bra approximerar F-serien resp. F-integralen funktionen?
- Laplace-, Fourier, z-transformation: beräkning, amplitudspektrum, energi, tillämpning på filter (lösning av begynnelsevärdesproblem, stabilitet, sinustest), faltning.
- Ortogonalserier.

Uppgift 1

Denna uppgift behandlar Laplacetransformation och Fouriertransformation. Du skall lära dig att transformera (och lösa BV-problem) med *maple* och se hur bra F-serien (F-integralen) approximerar en funktion resp. θ och δ!

a) Impulståget $u(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-m)$ har Fourierserien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2n\pi t}$. Rita delsummorna $\sum_{n=-N}^{N} e^{j2n\pi t}$ för $N = 10$ och för $N = 205$ i var sitt diagram ($-1.3 < t < 6.3$).

b) Rita den spektrala avskärningen $\theta_\Omega(t)$ av $\theta(t)$ för $\Omega = 12\pi$ och för $\Omega = 2000$ i samma diagram ($-1 < t < 1$).

c) Rita den spektrala avskärningen $\delta_\Omega(t)$ av $\delta(t)$ för $\Omega = 10\pi$ och för $\Omega = 39\pi$ i var sitt diagram ($-2 < t < 2$).

d) Laplacetransformera $\left(\frac{\sin(2x)}{x} - \frac{\sinh(2x)}{x}\right)\theta(x)$, inverstransformera $\frac{s^2+s+2}{(s+1)^2\left(s^2+1\right)}$.
Lös (DE) $3y''' - 2y'' + 9y' - 6y = \theta(t-1) - \theta(t-2)$.

e) Fouriertransformera $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} e^{-|x|}$, rita $f(x)$ och den spektrala avskärningen $f_\Omega(x)$ av f för $\Omega = 4\pi$ i samma diagram ($-2 < x < 2$).

Uppgift 2

Denna uppgift behandlar tidskontinuerliga filter. Du skall öva in begreppen filter, frekvensöverföringsfunktion, amplitudkarakteristik, överföringsfunktion, kausalitet, stabilitet (pol), sinussvar (transienter)...

Ett kausalt filter $\mathscr{F}_1$ har tillståndsekvationen $P(D)y = Q(D)x$ med $P(D) = D^4 + 5D^3 + 12D^2 + 16D + 8$ och $Q(D) = \frac{1}{5}(40D + 41)$.

a) Bestäm filtrets impulssvaret h_1 och filtrets stegsvar J.
b) Är filtret stabilt?
c) Rita filtrets amplitudkarakteristik för $|\omega| < 9$ och beskriv filtret.
d) Vilket filter fås om man ersätter $Q(D)$ med $Q_1(D) = \frac{1}{40}\left(40D^4 + 41\right)$?
e) Bestäm svaret på $\sin\frac{t}{\sqrt{2}}$ och på $\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\,\theta(t)$ och rita dessa svar för $-1 < t < 6$ i samma diagram.
f) Bestäm $y(t)$ = svaret på $x(t) = e^{-|t|}\cos 2t$ och rita $x(t)$ och $y(t)$ för $-6 < t < 6$ i samma diagram.
g) Man seriekopplar $\mathscr{F}_1$ med ett kausalt LTI-filter $\mathscr{F}_2$ som har överföringsfunktionen

$$H_2(s) = \frac{5(2s^7 + 6s^6 - 43s^5 - 157s^4 - 270s^3 - 40s^2 + 360s + 240)}{40s^5 + 321s^4 + 2887s^3 + 10665s^2 + 15280s + 7257}$$

och får då ett kausalt LTI-filter $\mathscr{F}_3$. Visa att $\mathscr{F}_3$ är stabilt, beräkna och rita dess amplitudkarakteristik och beräkna dess impulssvar explicit, koefficienterna med 3 decimaler.

Anvisningar, ledningar, tips

Allmänt

Förbered dig innan du sätter dig vid datorn, skriv ner det du vill göra med datorn. Gå igenom *maple* exemplen först. Försök även att lösa uppgifterna så långt det går för hand (*maple* kontrollräknar). Läs uppgiftstexten noggrant (t.ex. "rita i samma plot" eller "i var sitt plot"), kommentera, svara på frågorna! Kolla rimligheten av resultaten!!

- För beräkning av Laplace- resp. Fourier-transform och deras inversa transformer laddas integral-transformations-paketet in (*with*(*inttrans*)).
- Litteraturtips: *R.B.Israel*: Calculus: The Maple Way (Addison-Wesley,1996) och *E.Pärt-Enander/A.Sjöberg*: Användarhandledning för MATLAB (Uppsala univ., 1998)

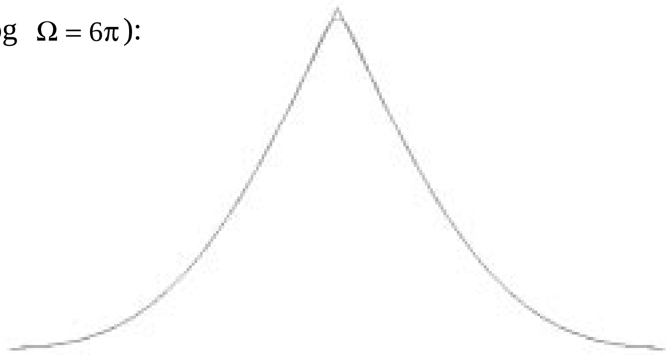
Till uppgift 1

a) Utnyttja $\sum_{n=-N}^{N} e^{jn\Omega t} = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\Omega t}{\sin\frac{\Omega}{2}t}$ (sid. 3:29, se även appendix A1.1), se ex1. Ta *numpoints*>1500.

b),c) $\theta_\Omega(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(\Omega t), \delta_\Omega(t) = \frac{\sin(\Omega t)}{\pi t}$ (sid. 4:28 resp. sid. 4:29). Se slutet av ex3.

d) *Maple* kan räkna med δ (= *Dirac*) och θ (= *Heaviside*), se ex2. Differentialekvationer löser man m.h.a. Laplacetransformation genom att välja *method = laplace*; räkna med godt. $y(0) = a,\ y'(0) = b,\ y''(0) = c$! Se ex2.

e) Följ ex3: för att kunna beräkna (numeriskt) och rita den spektrala avskärningen skall du beräkna imaginärdelen av integranden $\hat{f}(\omega)e^{j\omega t}$ (med *Im*, *evalc* och *simplify*) och därmed motivera att den är udda (ej trivialt, bevis krävs), sedan beräknar du realdelen och motiverar att den är jämn, alltså är $f_\Omega(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\Omega \operatorname{Re}\left(\hat{f}(\omega)e^{j\omega x}\right)d\omega$. Har du lyckats får du följande graph som visar hur bra denna approximation är (jag tog $\Omega = 6\pi$):



Till uppgift 2

Följ ex4, där finns alla nödvändiga tips.

b) Glöm ej att kolla att *grad*(*nämnare*)≥ *grad*(*täljare*) !

e) Sinussvaret skall du kunna (skall ej beräknas med Fouriertransform!).

f) Här går det med $\hat{h}(\omega) = H(j\omega)$ (enklare än mitt ex). Glöm ej *evalc* för att kunna rita!

g) Här får du hela motiveringen (och ett delsvar): seriekopplingen mellan filtret $\mathcal{F}_1$ och filtret $\mathcal{F}_2$ är filtret $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1$: $x \mapsto (x * h_1) * h_2 = x * (h_1 * h_2)$, alltså har $\mathcal{F}_3$ impulssvaret $h_3 = h_1 * h_2$ och överföringsfunktionen $H_3 = H_1 H_2$ ($= \frac{2s^4 - 55s^2 + 60}{s^5 + 9s^4 + 79s^3 + 330s^2 + 577s + 354}$). Räknigarna (beräkna och rita $A(\omega)$) skall göras exakt, för att "se" h_3 skall du räkna med flyttal eller skriva *evalf*(*%*) efter *invlaplace*(H_3(*s*),*s*,*t*), se ex4c. Vilket filter fick du nu?

Lycka till !

Bernhard

november 2001