

Tentamensskrivning i Fourieranalys för E2, 1996-08-27, kl 8.45-12.45

Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, skall lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej dosa.

Telefon:

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.

Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat !!!

=====

1. Ett kausalt filter har tillståndsekvationen $y' + a y = b x' + c x$
(a, b, c komplexa tal).

a) För vilka komplexa tal a, b, c är filtret stabilt ? (3p)

Låt nu $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$, $c = -\frac{3}{2}$:

b) Bestäm stegsvaret. (2p)

c) Bestäm en insignal som ger utsignalen $\sin \frac{t}{2}$. (2p)

d) Bestäm svaret på $\sin t$ (3p) och på $\sin t \theta(t)$ (4p). (7p)

e) Bestäm svaret på $e^t \theta(-t)$, på $e^{-t} \theta(t)$ och på $e^{-|t|}$ (6p).

Bestäm dessutom Ω så att hälften av den totala energin av utsignalen till $e^t \theta(-t)$ ligger i frekvensbandet $|\omega| \leq \Omega$ (3p). (9p)

2. Lös värmeledningsproblemet
$$\begin{cases} u''_{xx} = u'_t & \text{för } 0 < x < \pi, t > 0 \\ u'_x(0, t) = u'_x(\pi, t) & \text{för } t \geq 0 \\ u(x, 0) = 4 \sin^4 x & \text{för } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$
 (7p)

3. Bestäm det polynom av grad högst 4 som bäst approximerar funktionen $\sinh(x)$ i $L_2(-1, 1)$. (6p)

4. Beräkna $\frac{1}{1+t^2} * \arctan t$. (4p)

5. Motivera Fouriers integralsats genom att utgå från en Fourierserie vars period går mot oändligheten. (4p)

6. a) Definiera "distribution". (1p)

b) Visa $\theta(t) \stackrel{\text{Laplace}}{\supset} \frac{1}{s}$. (2p)

c) Visa $\theta(t) \stackrel{\text{Fourier}}{\supset} \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$. (3p)