Datorlaborationer i matematiska metoder E2, fk, del B (TMA980), ht 1998

1. Laborationerna är ej obligatoriska.

2. Förtjänstfullt utförda lösningar ger bonuspoäng vid tentamina i matematiska metoder, fk, del B, 14/12-98, 7/4-99 och 17/8-99, nämligen 1 BP per 10p (BP=INT(P/10)) för uppgifterna 1 till 5 samt 1 BP för uppgift 6.

3. Lösningarna skall lämnas senast on, 19/12, kl 9^{45} (efter föreläsningen) till mig. Skriv namn och personnummer längst upp på varje inlämnat blad, blad utan namn eller utan personnummer beaktas ej (ger ej poäng!). Lösningarna lämnas tillbaka med tentan.

Syfte

Med dessa laborationer skall du lära dig att utnyttja datorn i denna kurs för att utföra beräkningar och visualisera dina resultat och därmed öka förståelsen. De tar upp:

- Spektral avskärning: hur bra approximerar F-serien resp F-integralen funktionen?
- Laplace-, Fourier, z-transformation: beräkning, amplituspektrum, energi, tillämpning på filter (stabilitet, sinustest), faltning.
- Ortogonalserier.

Uppgift 1

a) Impulståget $u(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-m)$ har Fourierserien $\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\Omega t}$. Rita delsummorna $\sum_{n=-N}^{N}e^{jn\Omega t}$ för $N=13$ och för $N=222$ för $-1.4<t<1.4$ i var sitt diagram.

b) Rita den spektrala avskärningen $\theta_\Omega(t)$ av $\theta(t)$ för $\Omega=13\pi$ och $\Omega=2222$ för $-1<t<1$ i samma diagram.

c) Rita den spektrala avskärningen $\delta_\Omega(t)$ av $\delta(t)$ för $\Omega=13\pi$ och $\Omega=36\pi$ för $-2<t<2$ i var sitt diagram. (1p var)

Uppgift 2

Ett kausalt filter har tillståndsekvationen $P(D)y=Q(D)x$ med
$P(D)=D^4+5D^3+12D^2+16D+8$ och $Q(D)=10D+11$.

a) Bestäm filtrets impulssvaret h och filtrets stegsvar J. (2p)

b) Är filtret stabilt? (1p)

c) Rita filtrets amplitudkarakteristik för $|\omega|<9$ och beskriv filtret.
Vilket filter fås om man ersätter $Q(D)$ med $Q_1(D)=10D^4+11$? (2p)

d) Bestäm svaret på $sin\frac{t}{\sqrt{2}}$ och på $sin\frac{t}{\sqrt{2}}\theta(t)$ och rita dessa svar för $-2<t<7$ i samma diagram. (4p)

e) Beräkna h:s totala energi. Hur mycket av den totala energin ligger i frekvensbandet $|\omega|<\pi$ resp i $|\omega|<2\pi$ (svara i procent). (2p)

f) Bestäm $y(t)$ = svaret på $x(t) = e^{-|t|}\, sin\frac{t}{\sqrt{2}}$ och rita $x(t)$ och $y(t)$ för $-7 < \ < 7$ i samma diagram. (3p)

g) Rita h och h:s spektrala avskärning $h_{2\pi}$ för $0 < t < 2$ i samma diagram. (2p)

Uppgift 3

1) Ett kausalt diskret filter har tillståndsekvationen $P(D)y = Q(D)x$ med $P(D) = 144z^4 - 84z^3 - 30z^2 + 33z - 18$ och $Q(D) = 96z^4 - 260z^3 + 37z^2 - 41z$.

a) Är filtret stabilt? (1p)

b) Beräkna filtrets impulssvar h och rita $h(n)$ för $0 \le n \le 11$. (2p)

c) Rita filtrets amplitudkarakteristik $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ för $|\omega| < \pi$. (1p)

d) Bestäm svaret på $sin\frac{n\pi}{4}$ och på $sin\frac{n\pi}{4}\theta(n)$ och rita dessa svar för $-2 \le n \le 19$ i samma diagram. (3p)

2) Ett kausalt diskret filter har överföringsfunktionen $\frac{2z+1}{13z^5-12z^4+11z^3-10z^2+9z-8}$. Visa att filtret är stabilt, beräkna impulssvaret h och rita $h(n)$ för $0 \le n \le 16$. (3p)

Uppgift 4

Skriv ett program som beräknar faltningen $f * g(t)$

a) direkt **b)** med Fouriertransform och

testa ditt program med $e^{-x^2} * e^{-2x^2}$ och $e^{-2|t|} * e^{-3|t|}$. (4p)

Uppgift 5

Beräkna ett polynom P av grad högst 6 så att felet $\int_{-1}^{1} \left(P(x) - sin(\pi x)\right)^2 dx$ blir minimalt. Rita $P(x)$, $sin(\pi x)$ och Mclaurinpolynomet av grad 6 till $sin(\pi x)$ för $|x| \le 1$ så att man ser skillnaden mellan dem bra. Uppgiften skall b.a. visa dig att man får en bättre approximation m.a.p en ON-bas (Legenre-polynomen) än m.a.p en annan bas (polynomen $1, x, x^2, x^3, \cdots$). (5p)

Uppgift 6

1) Lös uppgifterna 1b), 2b) och 3a) med MATLAB.

2) Skriv ett program (valfritt i *maple* eller i MATLAB) som beräknar *Fibonacci*-talen F_n (= 1,1,2,3,5,8,13, …) och beräkna därmed F_{13} och F_{40}.

Anvisningar, ledningar,tips

Allmänt

- Förbered dig innan du sätter dig vid datorn, skriv ner lösningarna (det du vill göra med datan). Gå igenom mina exempel först. Kommentera, kolla rimligheten av dina svar!!
- Litteraturtips: *R.B.Israel*: Calculus: The Maple Way (Addison-Wesley,1996) och *E.Pärt-Enander/A.Sjöberg*: Användarhandledning för MATLAB (Uppsala univ., 1998)

Till uppgifterna

1) $\theta_\Omega(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si(\Omega t),\ \delta_\Omega(t)=\frac{sin(\Omega t)}{\pi t}$ (sid 4:28 resp sid 4:29). Se ex1 och ex2.

2) För beräkning av Laplace, resp Fourier-transform och invers transform måste integral-transformations-paketet laddas in (*with(inttrans)*). *Maple* kan räkna med δ (= *Dirac*) och θ (= *Heaviside*). b) Glöm ej att kolla att *grad*(*nämnare*)≥ *grad*(*täljare*) ! d) Sinussvaret skall du kunna (skall ej beräknas med Fouriertransform!). f) Du får korrekt svar om du hjälper *maple* att partialbråksuppdela frekvensöverföringsfunktionen fullständigt (*convert*(*H*(*I*ω), *parfrac*, ω,$\sqrt{3}$)). g) Utnyttja att imaginärdelen är udda. Se ex3.

3) För *z*-transformationen behöver du inte ladda in något. Den diskreta delta-funktionen är *charfcn[0]* (*characteristic function* i origo). Den diskreta Heaviside-funktionen är också *Heaviside*, alltså ej definierad i 0. Bäst (för numerisk beräkning och för plottning) att ersätta *Heaviside* med t.ex. *Step:= piecewise(n<0,0,n>=0,1)*.

4) Se ex5

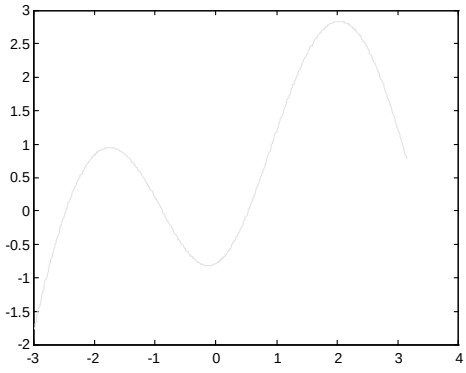
5) Utveckla i *Legendre*-polynom, beräkna koefficienterna med *maple*. Uttnyttja ”udda”!! Legendre-polynom finns i *maple*: Ladda in paketet ”ortogonala polynom” *with(orthopoly)*), skriv sedan bara *P*(*n*,*x*), då får du Legendrepolynomet av grad *n* (i variabeln *x*). Kom ihåg Taylorutvecklingen (*taylor*(…)), polynomet (som kan ritas) får du sedan med *convert*. Rita de tre funktionerna i samma diagramm! Se tenta 96-08-20 uppg.3 (med lösning!).

6) Med *>hold on* ritar du flera kurvor i samma diagram (stängs av sedan med >*hold off*). Läs gula boken och *help plot* (*fplot, subplot, axis, title,* osv). Beräkna rötterna med *roots* och plotta dem sedan. Observera skillnader (*ln – log, Pi – pi, arctan – atan* osv) . I kursboken (analys, del2) finns ett appendix om MATLAB!
Vi ger direkt ett

EXEMPEL (MATLAB)

Vi ritar kurvan $y=2area\,sinh(x)sin(x)+\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}$:

```
» x=-3:0.01:pi;
» plot(x,2*asinh(x).*sin(x)+x/2-pi/4) .
```



Observera att MATLAB kräver ”vektoroperationer” (ex: *x.*x, x.^2, sin(x)./x* osv). Funktioner kan även plottas med *fplot* (obs ”fnuttarna”):

```
» fplot('2*asinh(x).*sin(x)+x/2-pi/4',[-3,pi]).
```

Lycka till

Bernhard, nov 98