## EXEMPEL 1: Fourierserier av impulser

Vi löser.ex2 (sid. 3:32), dvs vi betraktar den 2-periodiska funktionen f vars andra derivata är

```
> fbiss:=t->Sum(2*Dirac(t-2*k)-2*Dirac(t-2*k-1)-2*Dirac(1,t-2*k),n=-infinity..infinity);
```

$$fbiss := t \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2\,\mathrm{Dirac}(t-2k) - 2\,\mathrm{Dirac}(t-2k-1) - 2\,\mathrm{Dirac}(1, t-2k))$$

Koefficienterna kan du beräkna med *maple*:

```
> c1:=int(1/2*(2*Dirac(t)-2*Dirac(t-1)-2*Dirac(1,t))*exp(-I*k*Pi*t),t=-1/2..3/2);
```

$$c1 := 1 - \mathbf{e}^{(-I k \pi)} - I k \pi$$

För att se det bättre (och framför allt, för att kunna rita bättre och snabbare) förenklar vi, t.ex. med *simplify* och *convert(...,sincos)* eller *convert(...,trig),* men bäst med "komplex beräkning" (dvs på formen $a + jb$). För att *maple* skall kunna räkna ut $\cos(k\pi)$ eller och $\sin(k\pi)$ måste vi säga till *maple* att $k$ är heltal:

```
> assume(k,integer):c[k]:=evalc(c1);
```

$$c_{k\sim} := 1 - (-1)^{k\sim} - I\,k\sim \pi$$

För att rita Fourierserien (delsummor) beräknar vi dock amplitudfasvinkelformen. Med *abs* får du beloppet. med *argument* argumentet. Vill du se resultatet, så räknar du ut det igen med *evalc*:

```
> abs(c[k]):evalc(abs(c[k]));
```

$$\sqrt{(1-(-1)^{k\sim})^2 + k\sim^2 \pi^2}$$

```
> argument(c[k]):evalc(argument(c[k]));
```

$$-\arctan\left(\frac{k\sim \pi}{1-(-1)^{k\sim}}\right)$$

Anmärkning Du kan skriva z på polär form med *polar* (måste läsas in):

```
> readlib(polar):polar(c[k]): (Skriv ut och beskåda det !)
```

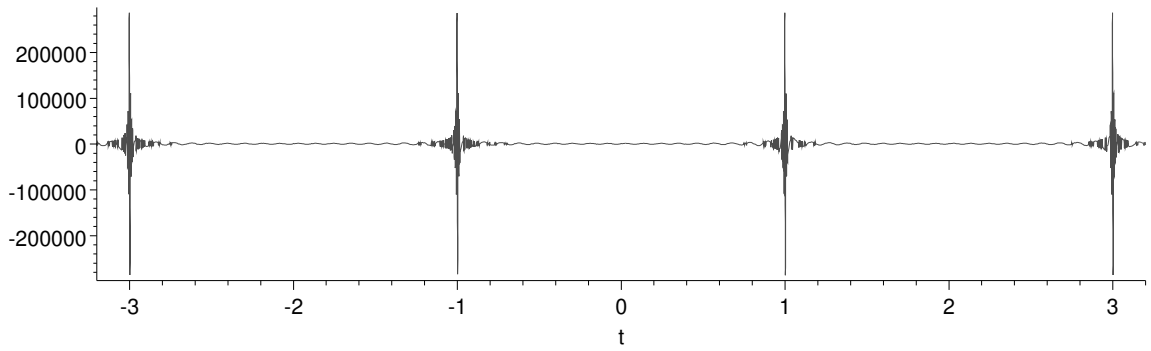
Men vi beräknar för säkerhets skull

```
> alpha:=x->piecewise((-1)^x=1,Pi/2,arctan(-Pi*x/2)):    Kolla:
> alpha(x);
```

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\pi & (-1)^x = 1 \\ -\arctan\left(\frac{1}{2}\pi x\right) & otherwise \end{cases}$$

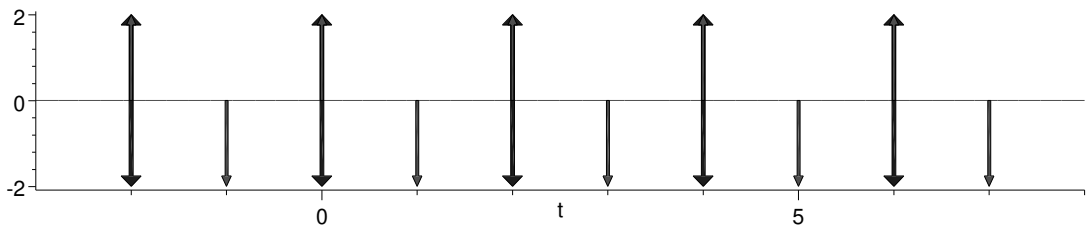
Då kan vi nu rita, men det går fortare, om vi skriver in $c_k$ själva (varför?!):

```
> fsum1:=N->sum(2*((1-(-1)^k)^2+k^2*Pi^2)^(1/2)*cos(Pi*k*t+alpha(k)),k=1..N):
> plot(fsum1(323),t=-3.2..3.2,numpoints=977);
```




Tillägg Vi kan också "rita" *fbiss*, genom att "rita" $\delta$ resp $D(\delta)$ som pil resp dubbelpil:

```
> with(plottools):
> fb1:=k->arrow([2*k,0],[2*k,2],0.03,0.1,0.12,color=red):
> fb2:=k->arrow([2*k+1,0],[2*k+1,-2],0.03,0.1,0.12,color=red):
> fb3:=k->arrow([2*k,0],[2*k,2],0.04,0.21,0.12,color=blue):
> fb4:=k->arrow([2*k,0],[2*k,-2],0.04,0.21,0.12,color=blue):
> plots[display]([seq(fb1(k),k=-1..3),seq(fb2(k),k=-1..3),seq(fb3(k),k=-1..3),seq(fb4(k),k=-1..3),plot(0,t=
  -3..8)]);
```



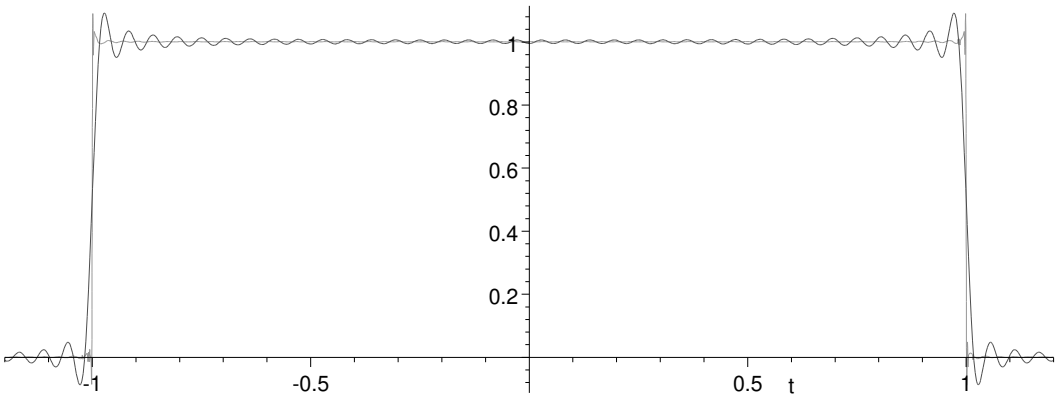

## EXEMPEL 2: Spektral avskärning

Vi ritar den spektrala avskärningen till fyrkantpulsen $p(t) = p(t+T) - p(t-T)$ för $T = 1$, dvs $\frac{\mathrm{Si}((t+1)\,\Omega) - \mathrm{Si}((t-1)\,\Omega)}{\pi}$ (sid 4:08):

```
> fsp:=Omega->(Si((t+1)*Omega)-Si((t-1)*Omega))/Pi;
```

$$fsp := \Omega \to \frac{\mathrm{Si}((t+1)\,\Omega) - \mathrm{Si}((t-1)\,\Omega)}{\pi}$$

```
> plot({fsp(36*Pi),fsp(2222)},t=-1.2..1.2,numpoints=777);
```




## EXEMPEL 3: Transformationer (Laplace-, Fourier-, z-)

Vi betraktar ett kausalt filter med överföringsfunktion $H$ (ytterligare en variation till uppg2):

```
> H:=s->(8*s^3-4)/(s^4+5*s^3+12*s^2+16*s+8);
```

$$H := s \to \frac{8\,s^3 - 4}{s^4 + 5\,s^3 + 12\,s^2 + 16\,s + 8}$$

Är filtret stabilt? *Grad(nämnare) > grad(täljare)* och $H$:s poler är

```
> solve(denom(H(s)),s);
```

$$-2,\ -1,\ -1 + I\sqrt{3},\ -1 - I\sqrt{3}$$

Alla poler har negativ realdel, alltså är filtret stabilt. Vi beräknar impulssvaret $h$. Men obs, *maple* skriver inte faktorn $\theta(t)$, skriver du faktorn *Heaviside*$(t)$, så är $h$ inte definierad i origo, vill du rita $h$, så får du ett *plot-error* meddelande. Men för Fouriertarnsformation behöves faktorn!

```
> with(inttrans):h:=t->invlaplace(H(s),s,t):  kolla:
```

```
> h(t);
```

$$17\,\mathbf{e}^{(-2\,t)} - 4\,\mathbf{e}^{(-t)} - 5\,\mathbf{e}^{(-t)}\sqrt{3}\,\sin(\sqrt{3}\,t) - 5\,\mathbf{e}^{(-t)}\cos(\sqrt{3}\,t)$$

Fouriertransformen fås som $H(I\,\omega)$ eller direkt:

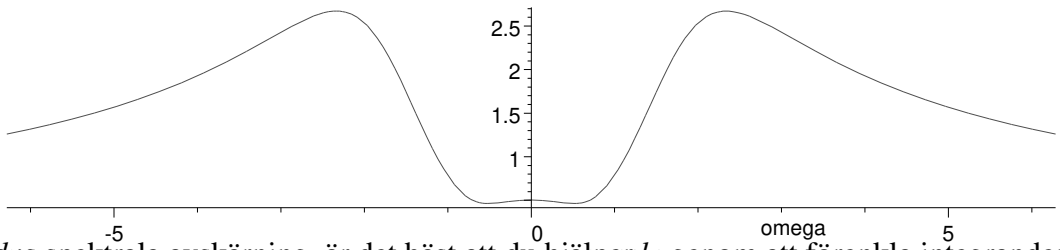
```
> fh:=subs(s=I*omega,H(s));simplify(fourier(Heaviside(t)*h(t),t,omega));
```

$$fh := \frac{-8\,I\,\omega^3 - 4}{\omega^4 - 5\,I\,\omega^3 - 12\,\omega^2 + 16\,I\,\omega + 8}$$

$$-4\,\frac{2\,I\,\omega^3 + 1}{(2 + I\,\omega)\,(1 + I\,\omega)\,(-I\sqrt{3} + 1 + I\,\omega)\,(I\sqrt{3} + 1 + I\,\omega)}$$

(kolla att det ger samma svar (*expand* nämnare..)). Vilket filter? Rita $h$:s amplitudspektrum:

```
> plot(abs(fh),omega=-2*Pi..2*Pi);   (alltså, filtrets karaktär ???)
```




För att rita *h*:s spektrala avskärning, är det bäst att du hjälper *maple* genom att förenkla integranden, ffa då man kan utnyttja jämn-udda. Titta på resultatet, "se" att im-delen är udda, jag skriver ej ut det:

```
> fh1:=simplify(evalc(fh));
```

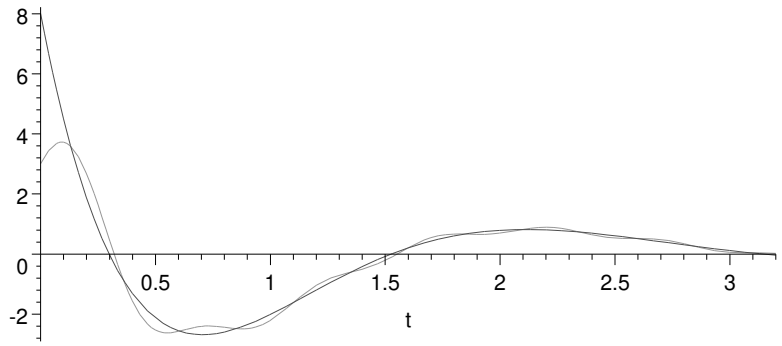
$$fh1 := -4\,\frac{33\,\omega^4 - 12\,\omega^2 + 8 - 10\,\omega^6 + 2\,I\,\omega^7 - 24\,I\,\omega^5 + 21\,I\,\omega^3 - 16\,I\,\omega}{\omega^8 + \omega^6 + 64\,\omega^2 + 64}$$

```
> integrand:=simplify(fh1*exp(I*t*omega)):
> nyint:=simplify(evalc(integrand)):
> nyint2:=evalc(Re(nyint));
```

$$nyint2 := -4\,(33\cos(t\,\omega)\,\omega^4 - 12\cos(t\,\omega)\,\omega^2 + 8\cos(t\,\omega) - 2\,\omega^7\sin(t\,\omega) + 24\,\omega^5\sin(t\,\omega) - 21\,\omega^3\sin(t\,\omega) - 10\,\omega^6\cos(t\,\omega) + 16\,\omega\sin(t\,\omega))\,/\,(\omega^8 + \omega^6 + 64\,\omega^2 + 64)$$

Titta vad enkelt det blev! Då kan vi integrera:

```
> Omega:=4*Pi:spah:=1/Pi*Int(nyint2,omega=0..Omega):
> plot({spah,h(t)},t=0..3.2);
```




Inte så värst bra ("i början"), men i ditt exempel ser du knappt någon skillnad!

Här får du ett exempel till, ett *Butterworth*-filter av ordning 3 med *cutoff frequency* $2\,\pi$:

Tillståndesekvationen är $\left(\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial t\,\partial t}\,y\right) + 4\,\pi\left(\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial t}\,y\right) + 8\,\pi^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\,y\right) + 8\,\pi^3 = 8\,\pi^3\,x$,

alltså är överföringsfunktionen

```
> HB := s -> 8*Pi^3/(s^3+4*Pi*s^2+8*Pi^2*s+8*Pi^3);
```

För att se om filtret är stabilt beräknar vi *H*:s poler, ; det kan man med "*allvalues(solve..)*" eller direkt med

```
> fsolve(denom(HB(s)),s,complex);
```

$$-6.283185311,\ -3.141592655 - 5.441398091\,I,\ -3.141592655 + 5.441398091\,I$$

Alla har realdel<0, grad-villkoret uppfyllt, alltså är filtret stabilt och frekvensöverföringsfunktionen är

```
> fhb:=w->subs(s=I*w,HB(s)):simplify(evalc(fhb(w)));
```

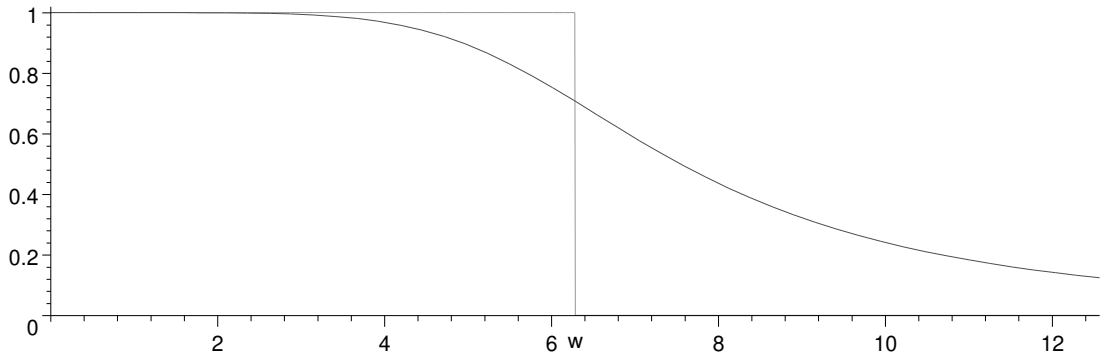
$$8\,\frac{\pi^3\,(-4\,\pi\,w^2 + 8\,\pi^3 + I\,w^3 - 8\,I\,\pi^2\,w)}{64\,\pi^6 + w^6}$$

```
> A1:=w->evalc(abs(fhb(w))):
> A:=w->simplify(A1(w)):A(w);
> A(w);
```

$$8\,\frac{\pi^3}{\sqrt{64\,\pi^6 + w^6}}$$

```
> plot([A(w),Heaviside(2*Pi-w)],w=0..4*Pi);
```

Nå, vilket filter är detta Butterworth filter??



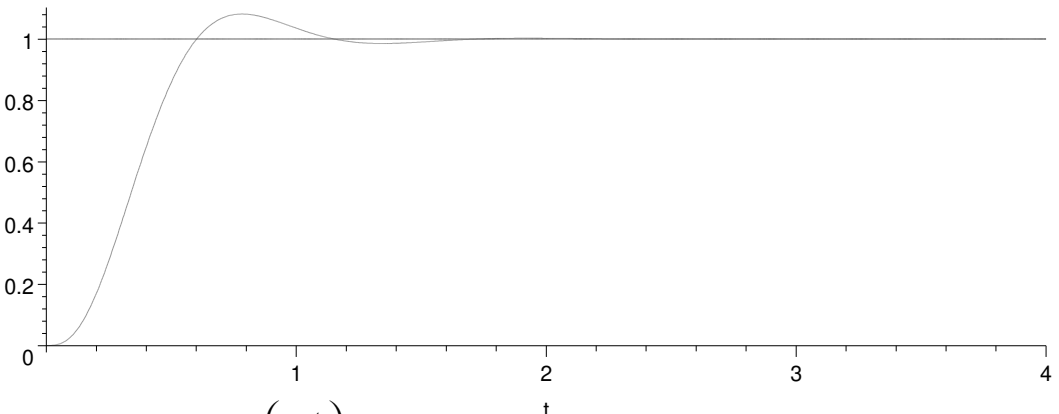

Av intresse är alltid stegsvaret:

```
> hb:=simplify(invlaplace(HB(s)/s,s,t));
```

$$hb := -\mathbf{e}^{(-2\,\pi\,t)} - \frac{2}{3}\,\mathbf{e}^{(-\pi\,t)}\,\sqrt{3}\,\sin(\sqrt{3}\,\pi\,t) + 1$$

```
> plot({1,hb},t=0..4,numpoints=979);
```

titta vad snabbt filtrets stegsvar = steget:



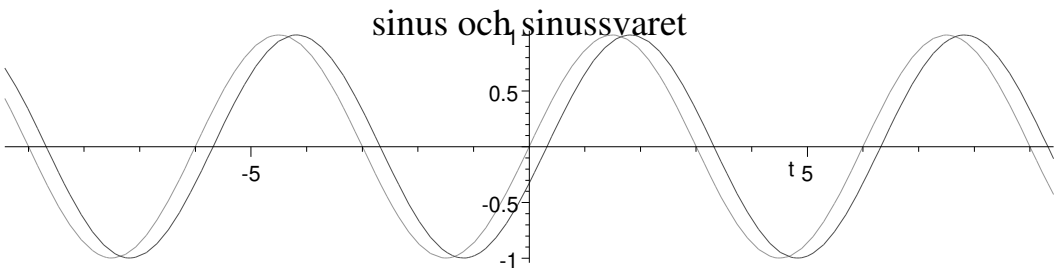

Sinussvaret då, säg svaret på $\sin\left(\frac{\pi\,t}{3}\right)$:

```
> phi:=w->argument(fhb(w)):
> evalc((phi(w)));
```

$$\arctan(w^3 - 8\,\pi^2\,w, -4\,\pi\,w^2 + 8\,\pi^3)$$

> sins:=evalc(A(Pi/3)*sin(Pi/3*t+phi(Pi/3)));plot({sin(Pi/3*t),sins},t=-3*Pi..3*Pi,title=‘sinus och sinussvaret‘);

$$sins := \frac{216}{46657}\sqrt{46657}\,\sin\left(\frac{1}{3}\,\pi\,t - \arctan\left(\frac{71}{204}\right)\right)$$

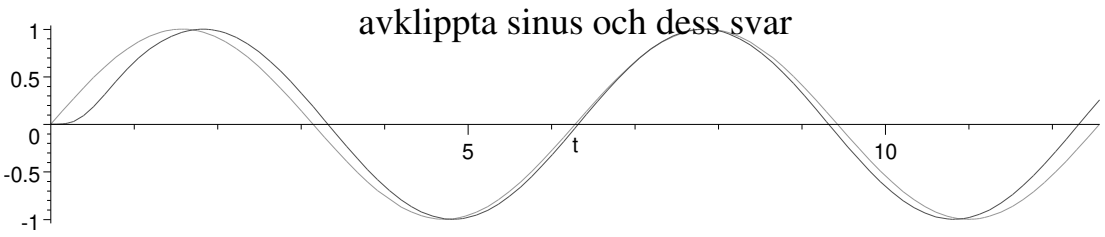



Och svaret på den "avklippta*sinus* (med samma frekvens):

> sint:=invlaplace(HB(s)*Pi/3/(s^2+Pi^2/9),s,t);

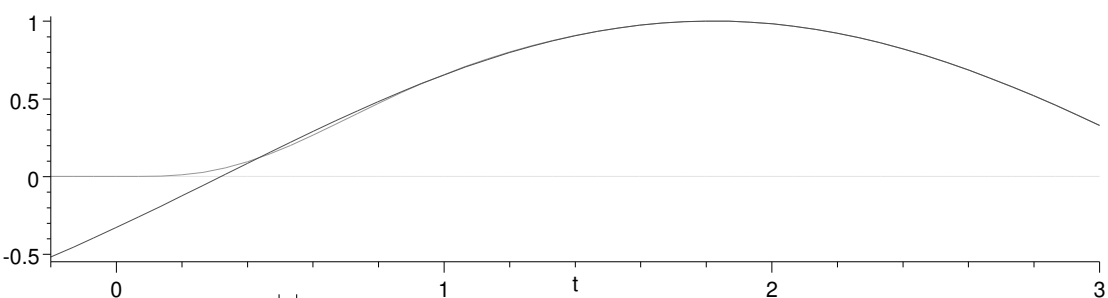
$$sint := \frac{8}{3}\,\pi^4\left(\frac{9}{148}\,\frac{\mathbf{e}^{(-2\,\pi\,t)}}{\pi^4} + \frac{315}{5044}\,\frac{\mathbf{e}^{(-\pi\,t)}\cos(\sqrt{3}\,\pi\,t)}{\pi^4} + \frac{111}{5044}\,\frac{\mathbf{e}^{(-\pi\,t)}\sqrt{3}\,\sin(\sqrt{3}\,\pi\,t)}{\pi^4} - \frac{5751}{46657}\,\frac{\cos\left(\frac{1}{3}\,\pi\,t\right)}{\pi^4} + \frac{16524}{46657}\,\frac{\sin\left(\frac{1}{3}\,\pi\,t\right)}{\pi^4}\right)$$

> plot({sint,sin(t)},t=0..4*Pi,title=‘avklippta sinus och dess svar‘);




Skillnaden mellan sinussvaret och svaret på den avklippta sinus syns bara nära 0:

> plot([sins,sint*Heaviside(t),0],t=-0.2..3);

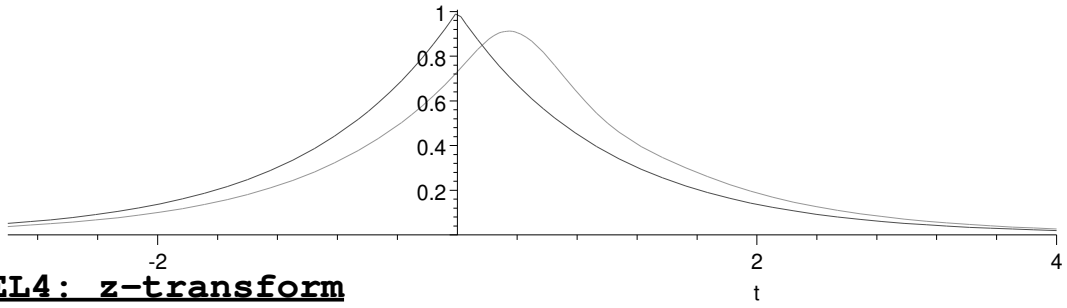



Och till sist svaret på t.ex$\mathbf{e}^{(-|t|)}$:

> ext1:=invfourier(fhb(w)*2/(1+w^2),w,t):

> ext2:=simplify(evalc(ext1)):

```
> ext:=Re(ext2):
> plot({ext,exp(-abs(t))},t=-3..4);
```




## EXEMPEL4: z-transform

Vi betraktar ett filter som har överföringsfunktion $H = \frac{Q}{P}$ där

```
> Q := -8*z + 432*z^5 + 192*z^3 - 792*z^4 - 48*z^2 - 12*z^3*3^(1/2) - 42*z^2*3^(1/2) + 15*z*3^(1/2) + 72*z^4*3^(1/2)
> P := 432*z^5 - 216*z^4 - 180*z^3 + 166*z^2 - 58*z + 10
> H := Q/P
```

Vi kollar om filtret är stabilt, dvs om $H$:s poler ligger inom enhetscirkeln: Följande visar att så är fallet:

```
> sol:=solve(denom(H)):for k from 1 to 5 do abs(sol[k]) od:
```

(Jag skriver inte ut det, men du skall...!). Nu beräknar vi $h$; glöm ej att säga att $n$ är heltal:

```
> with(plottools):with(plots):
> assume(n,integer);
> h1:=simplify(invztrans(H,z,n));
```

$$h1 := \frac{1}{6}\sqrt{3}\left(\sum_{_\alpha = \mathrm{RootOf}(_Z^2 - 3\,_Z + 9)} (-6\,_\alpha^{(-1-n\sim)} + _\alpha^{(-n\sim)})\right) + (-1)^{n\sim}\,5^{n\sim}\,6^{(-n\sim)} - 2^{(-n\sim)}\,n\sim$$

```
> h2:=convert(h1,radical);
```

$$h2 := \frac{1}{6}\sqrt{3}\left(-6\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}I\sqrt{3}\right)^{(-1-n\sim)} + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}I\sqrt{3}\right)^{(-n\sim)} - 6\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}I\sqrt{3}\right)^{(-1-n\sim)} + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}I\sqrt{3}\right)^{(-n\sim)}\right) + (-1)^{n\sim}\,5^{n\sim}\,6^{(-n\sim)} - 2^{(-n\sim)}\,n\sim$$

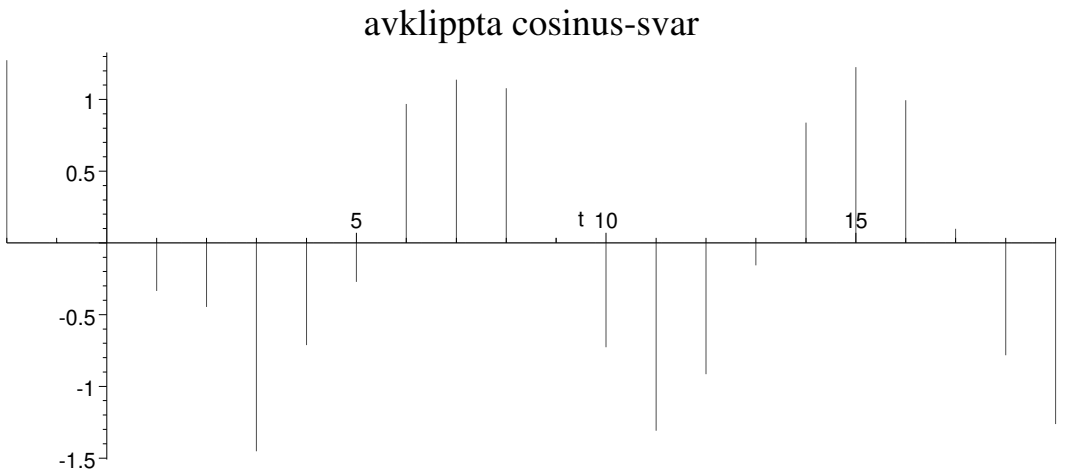
```
> h:=simplify(evalc(h2));
```

$$h := -2\,3^{(-1/2-n\sim)}\cos\left(\frac{1}{3}(1+n\sim)\,\pi\right) + 3^{(-1/2-n\sim)}\cos\left(\frac{1}{3}\,n\sim\,\pi\right) + (-1)^{n\sim}\,5^{n\sim}\,6^{(-n\sim)} - 2^{(-n\sim)}\,n\sim$$

Nu beräknar vi svaret på $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\theta(n)$ m.h.a. z-transform. Titta alltid på svaret först (men skriv sedan ut det!!!), då ser du att *convert(...,radical)* fortfarande innehåller *RootOff* (pga $\sqrt{2}$), då räknar vi helt enkelt med flyttal:

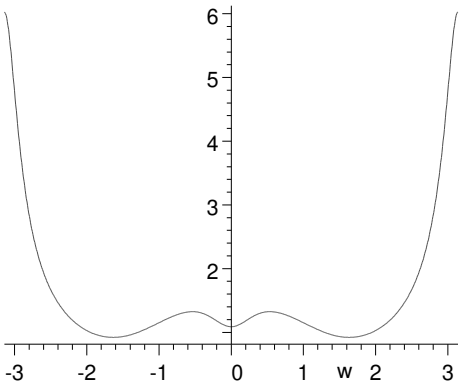
```
> X1:=ztrans(cos(Pi/4*n),n,z):
> cos1:=simplify(invztrans(X1*H,z,n)):
```

```
> cos2:=convert(cos1,radical):cos3:=evalf(cos2):
> figcos:=seq(line([k,0],[k,subs(n=k,cos3)],color=red),k=-2..19):
> display([figcos,plot(0,t=-2..19,color=green,title=‘avklippta cosinus-svar‘)]);
```




Nu beräknar vi amplitudkarakteristiken och svaret på $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$:

```
> overf:=omega->evalc(subs(z=exp(I*omega),H)):
> A:=omega->abs(overf(omega)):
> plot(A(w),w=-Pi..Pi,numpoints=765);
```



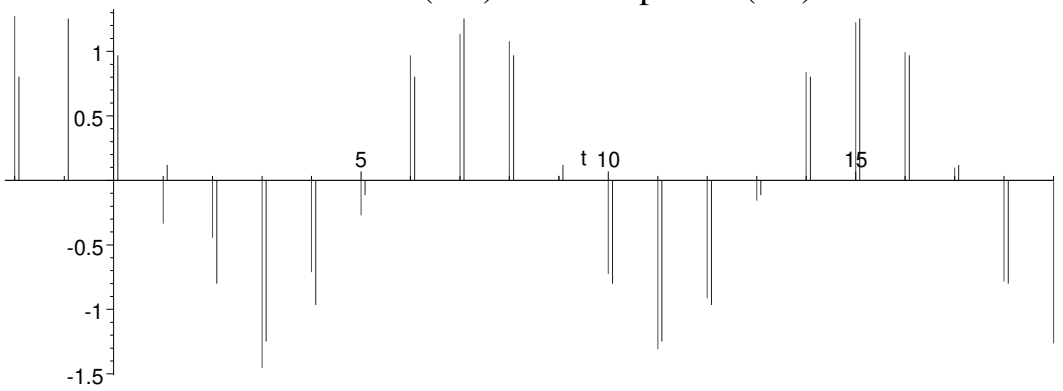

Svaret på $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ fås direkt:

```
> Phi:=omega->argument(overf(omega)):
> svarcos:=n->A(Pi/4)*cos(n*Pi/4+Phi(Pi/4)):
```

Vi ritar nu de två svaren, det sista litet försjutet, så att de syns tydligt:

```
> figcos2:=seq(line([k+1/12,0],[k+1/12,svarcos(k)],color=blue),k=-2..19):
> display([figcos,figcos2,plot(0,t=-2.2..19,color=green,title=‘cos-svar(röd) och svar på cos (blå)‘)]);
```

cos-svar(röd) och svar på cos (blå)




**EXEMPEL 4: Faltning**

Vi skriver ett program, som beräknar m.h.a. Laplacetransformation faltningen av funktioner som är 0 för $t<0$; det bästa är väl att skriva det som en "procedure", som du kan spara som .m-fil (med >*save 'filnamn.m'*; och sedan använda genom att läsa in den med >*read('filnamn.m')*):

```
> lfalt:=proc(f,g,t)
        lokal [s,t];
        with(inttrans);
        assume(t,real);
  invlaplace(laplace(f(t),t,s)*laplace(g(t),t,s),s,t)*Heaviside(t);
  end:
```

Kolla nu med några exempel $\mathbf{e}^{(-|b\,t|)}$ Heaviside($t$)*$\mathbf{e}^{(-|a\,t|)}$ Heaviside($t$):

```
> f:=t->(exp(-abs(a*t))):g:=t->(exp(-abs(b*t))):
> lfalt(f,g,t);
```

$$\mathbf{e}^{(-t\sim|a|)}\,\mathbf{e}^{(-t\sim|b|)}\,t\sim \text{Heaviside}(t)$$

Du kan skriva in det även direkt:

```
> lfalt(unapply(exp(-t),t),unapply(exp(t),t),t);
```

$$\left(-\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{(-t\sim)}+\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{t\sim}\right)\text{Heaviside}(t\sim)$$

Tillägg: Ett kort program för beräkning av faltningen av diskreta signaler som är noll för $n<0$:

```
> zfalt:=proc(x,y,n)
      lokal [m,n];
      sum(x(m)*y(n-m),m=0..n);
  end;
```

*zfalt* := **proc**($x$, $y$, $n$) *lokal*[$m$, $n$]; sum($x(m)$*$y(n-m)$, $m=0$ .. $n$) **end**

Testa med uppgiften i "transformer-"häfte (sid 8.2):

```
> x:=n->n:
> test:=k->zfalt(x,x,k)-binomial(k+1,3):
> seq(evalf(test(k)),k=2..37);
```

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0

*Fibonacci*-talen finns också i *maple*, nämligen i kombinatorik-paketet som laddas in med

*combinat. Maple* börjar numreringen med 1 ($F_1 = 1$, $F_2 = 1$ osv), då är t.ex

```
> F[40]=combinat[fibonacci](40);
```

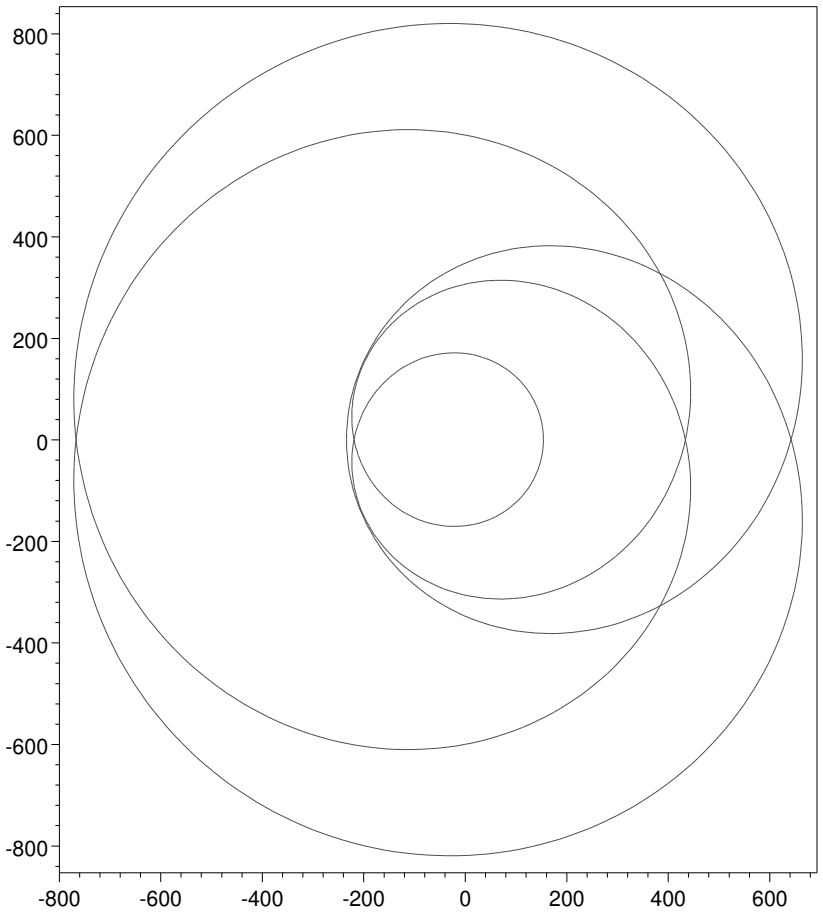
$$F_{40} = 102334155$$

## SLUT

Titta vilken fin kurva bilden av enhetscirkeln under $P$ (ex4) är:

```
> nyq:=subs(z=exp(I*phi),432*z^5-216*z^4-180*z^3+166*z^2-58*z+10):
> plot([Re(nyq),Im(nyq),phi=0..2*Pi],numpoints=977,axes=boxed,scaling=constrained,title='Nyquistdi
  agram till filtret i ex4');
```

Nyquistdiagram till filtret i ex4



**LYCKA TILL**

Bernhard