1 Kortkort om distributioner

För att beskriva vissa fysikaliska fenomen (punktladdning, stöt, dipol...) måste vi utvidga funktionsbegreppet:
Hittills har det varit så här: man känner en funktion f, om man känner alla funktionsvärden $f(t)$. Men man kan se en funktion även som en "operator": man känner f om man vet "vad f gör med en tillräckligt stor mängd av andra funktioner", såk. "testfunktioner", fysikalist: man känner ett fysikaliskt fenomen om man känner utgången (mätresultatet) vid tillräckligt många experiment. Det ger nya, såk. "generaliserade funktioner", och det skall vi nu beskriva:
Ett utmärkt val av testfunktioner (helt tillräckligt för det vi behöver) är

1.1 DEFINITION

$\mathfrak{S} = \{\Phi : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R} : \Phi$ är C^∞ , Φ och alla dess derivator avtar exponentiellt $\}$
(ett annat bra val vore alla C^∞-funktioner som är 0 utanför en begränsad mängd).
Då gäller för alla kontinuertliga funktioner f, g :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\Phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\Phi(t)\,dt \text{ för alla } \Phi \in \mathfrak{S} \Rightarrow f \equiv g\ .$$

Men då har vi redan allt: $\mathfrak{S}$ är ju ett linjärt rum, och ser vi f som den linjära tillordning

$\mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{C}$ som ordnar till en testfunktion Φ (det komplexa) talet $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\Phi(t)\,dt$ (ett "viktat medelvärde"), så ser vi f som en "distribution":

1.2 DEFINITION

En linjär avbildning $f : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{C}$ kallas DISTRIBUTION.

De viktigaste ex. är (det redan kända: "varje funktion", och det nya: Diracs δ-puls):

1.3 HUVUDEXEMPEL

1) Varje styckvis kontinuerlig funktion f ger upphov till ("kan ses som") en distribution $T_f : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{C}$ som definieras genom $T_f(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\Phi(t)\,dt$.
2) DIRACS DELTA FUNKTION $\delta : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{C}$ definieras genom $\delta(\Phi) = \Phi(0)$ ("evaluering", väl det allra enklaste?!!).

Observera att T_f är väldefinierad (integralen är konvergent för testfunktioner Φ) och linjär (ty integral), δ är linjär ty $\delta(c_1\Phi_1 + c_2\Phi 2) = c_1\Phi_1(0) + c_2\Phi_2(0) = c_1\delta(\Phi_1) + c_2\delta(\Phi_2)$.
Distributionerna i ex.1 kallas "reguljära", de står modell för allt vi gör med distributioner:

För det första skriver vi $f(\Phi)$ som brukligt för linjära operartorer (och smart) som "skalärprodukt" $\langle f \mid \Phi \rangle$, ty så funkar det (linjär i varje faktor). Kom ihåg vårt viktigaste linjära rum $L_2(a,b) = \left\{ f : \|f\|^2 = \int\limits_a^b f^2(t)\,dt \quad \text{konvergent} \right\}$ med skalärprodukt

$\langle f \mid g \rangle = \int\limits_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ (för reellvärda fkt, annars $\int\limits_a^b f(t)\,\overline{g(t)}dt$). Och eftersom denna skalärprodukt ges av en integral så skriver man skalärprodukten som en integral även i det allmänna fallet, ty den funkar precis så (är alltså lättast att räkna med så, reglerna kommer man ihåg enkelt som "integrerinsregler"). Alltså, f.o.m. nu skriver vi helt obesvärat

$f(\Phi) = \langle f \mid \Phi \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\Phi(t)\,dt$ för godt. distributioner, alltså även för δ.

Vi skapar nya distributioner (tänk alltid på reguljära distributioner T_f !):

1.4 DEFINITION

För en distribution $f : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{C}$ definieras distributionen

1) f_T genom $\langle f_T \mid \Phi \rangle = \langle f \mid \Phi_{-T} \rangle$ (kom ihåg: $f_T(t) = f(t-T)$)
2) $\tilde{f}$ genom $\left\langle \tilde{f} \mid \Phi \right\rangle = \left\langle f \mid \tilde{\Phi} \right\rangle$ (vi skriver här $\tilde{f}(t) = f(-t)$)
3) f' genom $\langle f' \mid \Phi \rangle = -\langle f \mid \Phi' \rangle$
4) Ψf genom $\langle \Psi f \mid \Phi \rangle = \langle f \mid \Psi\Phi \rangle$ (för testfkt Ψ, utvidgas sedan till kontin. Ψ)
5) $\hat{f}$ genom $\left\langle \hat{f} \mid \Phi \right\rangle = \left\langle f \mid \hat{\Phi} \right\rangle$ (vettigt, ty $f \in \mathfrak{S} \Leftrightarrow \hat{\mathfrak{f}} \in \mathfrak{S}$).

Kolla med reguljära distributioner rimligheten av dessa definitioner, t.ex. för derivatan av en distribution: $\langle f' \mid \Phi \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,\Phi(t)\,dt =$ [part.int.] $=$

$[f(t)\,\Phi(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\Phi'(t)\,dt = 0 - \langle f \mid \Phi' \rangle$; här ser du igen det fina med våra testfunktioner: $f(t)\,\Phi(t) \to 0$ då $t \to \pm\infty$!
Det anmärkningsvärda är, att vi i distributionsmening kan derivera funktioner som $|x|$, x^{-n} (ej reguljära distributioner!)...Vi sammanställer nu egenskaper för δ:

1.5 SATS

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,f(x)\,dx = f(0)$, $f(x)\,\delta(x) = f(0)\,\delta(x)$ om f är kontinuerlig i 0.
2) $\delta(-x) = \delta(x)$, $\delta(x) = 0$ för $x \neq 0$ (som en funktion!);
detta tillsammans med $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$ visar att δ ej är en funktion!!!
3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,f(x)\,dx = f(a)$, $\int\limits_A^B \delta(x-a)\,f(x)\,dx = \begin{cases} f(a), \text{ om } A < a < B \\ 0, \text{ om } a \notin [A,B] \end{cases}$
OBS: nonsens om $a \in \{A, B\}$!

4) $\theta^{'} = \delta$.
5) $\delta'(-x) = -\delta'(x)$.
6) $\hat{\delta} = 1,\ sgn(t) \supset \frac{2}{j\omega}$.

bevis

4) Vi skall visa att för alla testfunktioner Φ gäller att $\left\langle \theta^{'} \mid \Phi \right\rangle = \langle \delta \mid \Phi \rangle$:

$$\left\langle \theta^{'} \mid \Phi \right\rangle = [\text{definition}] = -\left\langle \theta \mid \Phi^{'} \right\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) \Phi^{'}(x)\,dx = -\int_{0}^{\infty} \Phi^{'}(x)\,dx =$$

$$-\left[\Phi(x)\right]_0^{\infty} =$$

$$\left[\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 0, \text{ty } \Phi \text{ är testfunktion}\right] = -0 + \Phi(0) = \langle \delta \mid \Phi \rangle \qquad \text{vsv}$$

6) Vi skall visa att för alla testfunktioner Φ gäller att $\left\langle \widehat{\delta} \mid \Phi \right\rangle = \langle 1 \mid \Phi \rangle$:

$$\left\langle \widehat{\delta} \mid \Phi \right\rangle = [\text{definition}] = \left\langle \delta \mid \widehat{\Phi} \right\rangle = \widehat{\Phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\,dx = \langle 1 \mid \Phi \rangle \qquad \text{vsv}$$

$f(t) = sgn(t) = 2\theta(t) - 1 \Longrightarrow f^{'}(t) = 2\delta(t) \supset j\omega\widehat{f}(\omega) = 2$; regel 13 sidA3 : 02 ger att $\widehat{f}(\omega) = \frac{2}{j\omega} + c\delta(\omega)$; men eftersom f är udda, så är även $\widehat{f}$ udda, alltså $c = 0$. vsv

Anmärkning:

δ beskriver en MONOPOL, δ' beskriver en DIPOL,... $(-1)^n \delta^{(n)}$ beskriver en 2^n-IPOL i 0.

T.ex. för en dipol: punktladdningar q och $-q$ i avståndet h har dipolmomentet $qh = 1$ med $q = \frac{1}{h}$. Låt nu h gå mot 0 så fås formellt (och helt korrekt i distributionsmening):
$\lim_{h\to 0} (q\delta(0) + (-q)\delta(h)) = \lim_{h\to 0} \frac{\delta(0)-\delta(h)}{h} = -\delta'$!