

0.1 Tentamen Fourieranalys för E2, 96-08-27,lösningar

0.1.1 Uppgift1

$x = \delta$ ger $h' + ah = b\delta' + c\delta$, Laplacetransformation ger $\mathfrak{F} : s$ överföringsfunktion

$$H(s) = \frac{bs+c}{s+a}.$$

a) \mathfrak{F} är stabilt, om $\text{Re } a < 0$ (a, b godt), eller om $c = ba$ (a, b godt.).

För $a = \frac{1}{2}, b = 3, c = \frac{-3}{2}$ är $H(s) = 3\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}}$ och $\hat{h}(\omega) = 3\frac{j\omega-\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}}$, alltså:

$$b) \mathfrak{F}(\theta) \supset 3\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{s} = 3\left(\frac{2}{s+\frac{1}{2}} - \frac{1}{s}\right) \subset 3\left(2e^{-\frac{t}{2}} - 1\right)\theta(t).$$

c) Sätt in $y = \sin \frac{t}{2}$ i \mathfrak{F} :s tillståndsekvation $y' + \frac{1}{2}y = 3(x' - \frac{1}{2}x)$, så får du $\frac{1}{2}\cos \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin \frac{t}{2} = 3(x' - \frac{1}{2}x)$ som satisfieras av $x(t) = -\frac{1}{3}\cos \frac{t}{2}$.

$$d) \mathfrak{F}(\sin t) = \left| \hat{h}(1) \right| \sin\left(t + \arg \hat{h}(1)\right) =$$

$$\left[\hat{h}(1) = 3\frac{j-\frac{1}{2}}{j+\frac{1}{2}} \Rightarrow \left| \hat{h}(1) \right| = 3 \text{ och } \arg \hat{h}(1) = \arg\left(-\left(\frac{1}{2} - j\right)^2\right) = \arg\left(\frac{3}{4} + j\right) = \arctan \frac{4}{3} \right] =$$

$$= 3 \sin\left(t + \arctan \frac{4}{3}\right) = \frac{3}{5}(3 \sin t + 4 \cos t).$$

$$\mathfrak{F}(\sin t \theta(t)) \supset 3\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1+s^2} = \frac{3}{5}\left(-\frac{4}{s+\frac{1}{2}} + \frac{4s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1}\right) \subset \frac{3}{5}\left(3 \sin t + 4 \cos t - 4e^{-\frac{t}{2}}\right)\theta(t).$$

$$e) \mathfrak{F}(e^t \theta(-t)) \supset 3\frac{j\omega-\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-j\omega} = \frac{-2}{j\omega+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-j\omega} = -2\frac{2}{1+j(2\omega)} + \frac{1}{1-j\omega} \subset -2e^{-\frac{t}{2}}\theta(t) + e^t\theta(-t).$$

$$\mathfrak{F}(e^{-t}\theta(t)) \supset 3\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{s+1} = 3\left(\frac{-2}{s+\frac{1}{2}} + \frac{3}{s+1}\right) \subset \left(-6e^{-\frac{t}{2}} + 9e^{-t}\right)\theta(t). \text{ Och det ger nu:}$$

$$\mathfrak{F}(e^{-|t|}) = \mathfrak{F}(e^t\theta(-t) + e^{-t}\theta(t)) = \left(9e^{-t} - 8e^{-\frac{t}{2}}\right)\theta(t) + e^t\theta(-t).$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Anm: Det sista får du även direkt, men jobbigare (?):} \\ \mathfrak{F}(e^{-|t|}) \supset 3\frac{j\omega-\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{1+\omega^2} = \frac{-8}{j\omega+\frac{1}{2}} - \frac{8j\omega}{\omega^2+1} + \frac{10}{\omega^2+1} \subset -8e^{-\frac{t}{2}}\theta(t) + 5e^{-|t|} + 4e^{-|t|} \text{sgnt} \end{array} \right].$$

$$y(t) = \mathfrak{F}(e^t\theta(t)) \text{ har den totala energin } E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{y}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| 3\frac{j\omega-\frac{1}{2}}{j\omega+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-j\omega} \right|^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\infty} 9 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = \frac{9}{\pi} [\arctan \omega]_0^{\infty} = \frac{9}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2}. \text{ I bandet } |\omega| \leq \Omega \text{ ligger ener-}$$

$$\text{gin } E_{\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{9}{1+\omega^2} d\omega = \frac{9}{\pi} [\arctan \omega]_0^{\Omega} = \frac{9}{\pi} \arctan \Omega. \text{ Nu skall } E_{\Omega} = \frac{1}{2}E, \text{ dvs}$$

$$\arctan \Omega = \frac{\pi}{4}, \text{ alltså } \Omega = \frac{\pi}{4}. \quad \textbf{svar:}$$

a) $\text{Re } a < 0, b, c$ godt eller $c = ab, a, b$ godt

$$b) 3\left(2e^{-\frac{t}{2}} - 1\right)\theta(t) \quad c) -\frac{1}{3}\cos \frac{t}{2}$$

- d) $\frac{3}{5}(3 \sin t + 4 \cos t)$ resp $\frac{3}{5} \left(3 \sin t + 4 \cos t - 4e^{-\frac{t}{2}} \right) \theta(t)$
 e) $-2e^{-\frac{t}{2}}\theta(t) + e^t\theta(-t)$ resp $\left(-6e^{-\frac{t}{2}} + 9e^{-t} \right) \theta(t)$
 resp $\left(9e^{-t} - 8e^{-\frac{t}{2}} \right) \theta(t) + e^t\theta(-t), \Omega = \frac{\pi}{4}$

0.1.2 Uppgift 2

Ansättningen $u(x, t) = X(x)T(t)$ ger $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} \stackrel{!}{=} \lambda$, det är ett S-L-problem för X : $\begin{cases} X'' = \lambda X, 0 < x < \pi \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$ med $\lambda \leq 0$. Till $\lambda = 0$ hör egenlösningen $X_0(x) = c$.

Till $\lambda X(x) < 0$ hör lösningarna $X(x) = a \cos \sqrt{-\lambda}x + b \sin \sqrt{-\lambda}x$.
 $X'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$, $X'(\pi) = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{-\lambda}\pi = 0 \Rightarrow \lambda_k = -k^2$, alltså:
 $\lambda_k = -k^2$, $X_k(x) = \cos kx$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Till dessa λ_k har ekv. $T' = \lambda_k T$ lösningarna $T_k(t) = e^{\lambda_k t} = e^{-k^2 t}$, alltså är
 $u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos kx e^{-k^2 t}$.

För $t = 0$ skall $u(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos kx = 4 \sin^4 x =$

$= (1 - \cos 2x)^2 = 1 - 2 \cos 2x + \frac{1}{2} (1 + \cos 4x) = \frac{3}{2} - 2 \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x$, dvs
 $c_0 = \frac{3}{2}$, $c_2 = -2$, $c_4 = \frac{1}{2}$ och $c_k = 0$ för $k \notin \{0, 2, 4\}$.

svar: $u(x, t) = \frac{3}{2} - 2e^{-4t} \cos 2x + \frac{1}{2}e^{-16t} \cos 4x$

0.1.3 Uppgift 3

$P(x) = \sum_{k=1}^4 c_k P_k(x)$ där $P_k(x)$ är Legendrepolytom och $c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \sinh x P_k(x) dx$.

Nu är $c_0 = c_2 = c_4 = 0$, ty $\sinh x$ är udda och P_0, P_2, P_4 är jämna.

Eftersom P_1, P_3 är udda så är $c_1 = 3 \int_0^1 x \sinh x dx = 3 [x \cosh x - \sinh x]_0^1 =$

$= 3 \cosh 1 - 3 \sinh 1$ och $c_3 = 7 \int_0^1 \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \sinh x dx = [\text{part.int}] =$

$= \frac{7}{2} [5(x^3 \cosh x - 3x^2 \sinh x + 6x \cosh x - 6 \sinh x) - 3(x \cosh x - \sinh x)]_0^1 =$

$= \frac{7}{2} (32 \cosh 1 - 42 \sinh 1)$.

Alltså är $P(x) = (3 \cosh 1 - 3 \sinh 1)x + \frac{7}{2}(16 \cosh 1 - 21 \sinh 1)(5x^3 - 3x)$.

svar: $\boxed{\left(-65 \cosh 1 + \frac{435}{2} \sinh 1\right)x + \left(280 \cosh 1 - \frac{735}{2} \sinh 1\right)x^3}$

Anm: Rita $\sinh x$ och $P(x)$ för att se vilken fantastisk approximation det är;

felet är $\int_{-1}^1 \left(\sinh x - \left(-65 \cosh 1 + \frac{435}{2} \sinh 1\right)x - \left(280 \cosh 1 - \frac{735}{2} \sinh 1\right)x^3\right)^2 dx = 0.3695 \times 10^{-5} !$

0.1.4 Uppgift 4

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} * \arctan t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{1+t^2} * \frac{1}{1+t^2} \supset \pi^2 e^{-2|\omega|} = \frac{\pi}{2} \pi 2 e^{-2|\omega|}$$

$$\left[e^{-|t|} \supset \frac{2}{1+\omega^2} \Rightarrow \frac{1}{1+t^2} \supset \pi e^{-|\omega|}\right] \Rightarrow f'(t) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+(\frac{t}{2})^2} \Rightarrow f(t) = \pi \arctan \frac{t}{2} + c,$$

eftersom $f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\tau^2} \cdot \arctan(-\tau) d\tau = 0$ [udda integrand], så är $c = 0$.

svar: $\boxed{\pi \arctan \frac{t}{2}}$