CTH&GU, matematik

Tentamen i matematiska metoder, fk, delB, TMA980, 1999-08-17, kl 8.45-12.45
Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen).Beta. Ej räknedosa.
Telefon:
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat !
===

LTI-filter = linjärt, tidsinvariant filter

1. **a)** Beräkna $(\cosh(t)\theta(t)) * (\cos(t)\theta(t))$. (3p)

b) Beräkna $(a^n\theta(n)) * (b^n\theta(n)),\ a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Svaret skall ges utan $\sum$-tecken. (3p)

2. Ett LTI-filter har amplitudkarakteristiken $A(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$

och faskarakteristiken $\Phi(\omega) = -2\arctan\omega$.

a) Bestäm filtrets impulssvar och visa att filtret är kausalt och stabilt.
Ange filtrets tillståndsekvation. (6p)

b) Bestäm svaret på $\cos t$. (2p)

c) Bestäm svaret på $\cos(t)\theta(t)$. (4p)

d) Bestäm svaret på $(1+t)e^t\theta(-t)$. (4p)

3. Ett diskret LTI-filter har impulssvaret $h(n) = \left(\frac{-1}{3}\right)^n \theta(n)$.

a) Visa att filtret är kausalt och stabilt. Ange filtrets tillståndsekvation. (3p)

b) Bestäm svaret på $\cos\frac{n\pi}{2}$. (3p)

c) Bestäm svaret på $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\theta(n)$. (5p)

4. Lös problemet $\begin{cases} u''_{xx} = u''_{tt} + u'_t, & 0 < x < \pi,\ 0 < t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = u(x,0) = 0,\ u'_t(x,0) = x \end{cases}$. (7p)

5. **a)** Visa $\delta \overset{Fourier}{\supset} 1$. (3p)

b) Härled Plancherels formler. (4p)

c) Visa $tf(t) \overset{Laplace}{\supset} -F'(s)$. (2p)

d) Vad menas med att ett filter är tidsinvariant? (1p)

BB

CTH&GU, matematik

Tentamen i matematiska metoder, fk, delB, TMA980, 1999-04-07, kl 14.45-18.15
Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen).Beta. Ej räknedosa.
Telefon:
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat !

==

1. Ett linjärt, tidsinvariant filter har stegsvaret $(1-\cos t)e^{-t}\theta(t)$.

a) Bestäm filtrets impulssvar. (2p)

b) Visa att filtret är stabilt och kausalt. (2p)

c) Bestäm filtrets amplitudkarakteristik. (4p)

d) Bestäm utsignalen då insignalen är $x(t)=\cos 2t$. (3p)

e) Visa att för insignaler med ändlig energi gäller $E(y)\le \frac{1}{4}E(x)$

där y är svaret på x och $E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt$ är energin av x. (3p)

f) Bestäm utsignalen då insignalen är $x(t)=5e^{t}\theta(-t)-2\delta(t)$. (5p)

2. Ett diskret filter har tillståndsekvationen $2y(n)+y(n-1)=x(n)-x(n-1)$.

a) Visa att filtret är stabilt. (2p)

b) Rita filtrets amplitudkarakteristik. (4p)

c) Bestäm filtrets stegsvar (dvs svaret på $\theta(n)$). (2p)

d) Bestäm svaret på $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. (3p)

e) Bestäm svaret på $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\theta(n)$. (4p)

3. Lös problemet
$$\begin{cases} u''_{xx}=u''_{tt} & ,0<x<\frac{\pi}{2},0<t \\ u'_x(0,t)=u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=u(x,0)=0,\ u'_t(x,0)=\delta'\left(x-\frac{1}{4}\right) \end{cases}.$$
(6p)

4. Vad är en distribution? (2p)

5. Visa faltningssatsen för Fouriertransformer. (4p)

6. Visa $e^{-at}f(t)\overset{Laplace}{\supset}F(s+a)$, $c^{n}x(n)\overset{z-transform}{\supset}X\left(\frac{z}{c}\right)$ och

$f(t-T)\overset{Fourier}{\supset}e^{-j\omega T}\hat{f}(\omega)$ $(T\in\mathbb{R})$. (1p+1p+2p) (4p)

BB

Tentamen i matematiska metoder, fk, del B, TMA980, 1998-12-14, kl 14.45-18.15
Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, lämnas tillbaka efter skrivningen).Beta. Ej räknedosa.
Telefon:
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat !
==

OBS: "LTI-filter" står för "linjärt tidsinvariant filter".

1. Ett LTI-filter har impulssvaret $h(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ t, & 0 \le t \le 1 \\ e^{1-t}, & 1 \le t \end{cases}$.

g) Visa att filtret är stabilt och kausalt. (2p)
h) Bestäm $H(s)$ och $\hat{h}(\omega)$. (5p)
i) Bestäm utsignalen då insignalen är $x(t) = 1$. (2p)
j) Bestäm utsignalen då insignalen är $x(t) = cos(2\pi t)$. (3p)
k) Lös för $t > 0$ problemet $y'(t) - \frac{1}{4}\int_0^t y(\tau)d\tau = h(t), y(0-) = -4$. (4p)

2. Ett diskret LTI-filter har överföringsfunktionen $H(z) = \frac{4(z^4 - z^2)}{4z^4 - 1}$.

f) Visa att filtret är stabilt och kausalt.
Ange även filtrets tillståndsekvation. (5p)
g) Bestäm filtrets amplitudkarakteristik. (3p)
h) Bestäm svaret på $sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$. (3p)
i) Bestäm filtrets impulssvar. (5p)

3. Lös problemet $\begin{cases} u''_{xx} + \frac{1}{4}u''_{yy} = 0, 0 < x < \pi, 0 < y \\ u(0,y) = u'_x(\pi,y) = 0, \\ u(x,0) = \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \lim\limits_{y\to\infty} u(x,y) = 0 \end{cases}$. (6p)

4. Visa att $\theta' = \delta$. (3p)

5. Visa att ett diskret LTI-filter är ett faltningsfilter. (4p)

6. Visa $\theta(t) \overset{Laplace}{\supset} \frac{1}{s}$, $\theta(n) \overset{z-transform}{\supset} \frac{z}{z-1}$ och

$e^{j\Omega t} f(t) \overset{Fourier}{\supset} \hat{f}(\omega - \Omega)$ $(\Omega \in \mathbb{R})$. (2p+2p+1p) (5p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E, fk, del B, TMA980, 1998-08-18, kl 8.45-13.45

Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, skall lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.

Telefon:

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat !!!

==

1. Lös för $t > 0$ funktionerna $x(t), y(t), z(t)$ ur systemet

$$\begin{cases} x' + y + z = 0 \\ x - y' - z = 0, \\ x + y + z' = 0 \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0.$$ (6p)

2. Ett kausalt filter har tillståndsekvationen $y'' + 3y' + 2y = 3x$.

a) Är filtret stabilt? (2p)

b) Visa att $|A(\omega)| \le \frac{3}{2}$ och rita $A(\omega)$:s graf
[$A(\omega)$ är filtrets amplitudkarakteristik]. (4p)

c) Hur stor del av impulssvarets totala energi ligger i bandet $|\omega| \le \sqrt{3}$? (4p)

d) Bestäm utsignalen, då insignalen är
$cos(\sqrt{2}\,t)$, resp $cos(\sqrt{2}\,t)\theta(t)$, resp $cos(\sqrt{2}\,t)\theta(-t)$ [3p+4p+1p]. (8p)

e) Bestäm en insignal, då utsignalen är $e^{-|t|} * (e^{-t}\theta(t))$. (4p)

3. Beräkna $e^{-|t|} * (e^{-t}\theta(t))$. (4p)

4. Lös problemet $\begin{cases} u''_{xx} = \frac{1}{4}u'_t, \quad 0 < x < 4,\ 0 < t \\ u(0,t) = u(4,t) = 0,\ u(x,0) = \delta(x-1) + \delta''(x-3) \end{cases}$. (7p)

5. **a)** Visa att ett linjärt, tidsinvariant filter är ett faltningsfilter $x \mapsto x * h$. (5p)

b) Visa att $f' = f * \delta'$. (2p)

6. Definiera "distribution" och "svag konvergens". (4p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E, fk, del B, TMA980, 1998-04-15, kl 14.15-18.15

Hjälpmedel: Formelsamling (delas ut, skall lämnas tillbaka efter skrivningen). Beta. Ej räknedosa.

Telefon:

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat !!!

==

1. Låt $f(t) = e^{2-t}\theta(t-1)$; löst för $t > 0$ problemet

$$2y'(t) + y(t) - \int_{0-}^{t} y(\tau)d\tau = 9f(t), \quad y(0-) = 3.$$ (6p)

2. Bestäm $\hat{f}(\omega)$, då $f(t) = e^{2-t}\theta(t-1)$, och beräkna med hjälp härav

$$\int_0^\infty \frac{\cos a\omega + \omega \sin a\omega}{1+\omega^2} d\omega \text{ och } \int_0^\infty \frac{\cos a\omega - \omega \sin a\omega}{1+\omega^2} d\omega \text{ för } a > 0.$$ (5p)

3. Låt $f(t) = e^{2-t}\theta(t-1)$; bestäm en funktion g så att $f * g(t) = e^{-|t|}$. (4p)

4. Ett kausalt filter $x \mapsto x*h$ har överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{s+2}{(2s+1)(s^2+2s+2)}.$$

a) Är filtret stabilt? (2p)

b) Bestäm en differentialekvation, som är tillståndsekvation för filtret. (2p)

c) Visa att för insignaler x med ändlig energi gäller att $E(y) \le E(x)$

($E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ är energin av x, y är svaret på x). (3p)

d) Bestäm svaret på $\sin(\sqrt{2}\,t)$. (4p)

e) Bestäm svaret på $\sin(\sqrt{2}\,t)\theta(t)$.

[Ledn: Det förekommer en partialbråksuppdelning: Gör en korrekt ansättning med reella A,B,C,D,E och en korrekt inverstransformation med dessa koefficienter, utan att beräkna dem (4p); bestäm sedan 2 av dessa koefficienter m.h.a. **d)** (kommentera!) (2p).] (6p)

5. Lös problemet
$$\begin{cases} u''_{xx} = \frac{1}{4}u''_{tt}, & 0 < x < 2,\ 0 < t \\ u'_x(0,t) = u'_x(2,t) = 0, & u(x,0) = \delta'(1-x),\ u'_t(x,0) = 0 \end{cases}.$$ (7p)

6. **c)** Visa att ett faltningsfilter $x \mapsto x*h$ är linjärt och tidsinvariant. (4p)

d) Visa att $e^{j\Omega t} f(t) \overset{Fourier}{\supset} \hat{f}(\omega - \Omega)$ $(\Omega \in \mathbb{R})$. (2p)

7. Definiera "distribution" och visa att $\hat{\delta} = 1$. (5p)

BB