DEFINITION

Operatorn $\underset{x(n)\mapsto x(n-1)}{D:\ \boldsymbol{S}\to\boldsymbol{S}}$ kallas FÖRDRÖJNINGS- (eller SKIFT-) OPERATOR ("delay"). Vi skriver $D^2 = D\circ D$ osv., alltså för $N\in\mathbb{N}$:
$D^N x(n) = x(n-N) = x_N(n)$ och $D^{-N}x(n) = x(n+N) = x_{-N}(n)$.

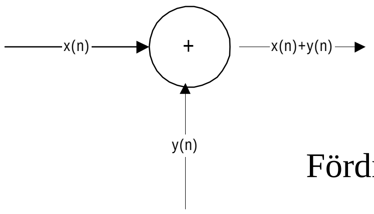
ANMÄRKNING

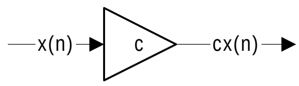
Är x, y sekvenser i $\boldsymbol{S}$ och c ett komplext tal så är $cx+y$ och xy sekvenser i $\boldsymbol{S}$ ($(cx+y)(n) = cx(n)+y(n)$ och $(xy)(n) = x(n)y(n)$). Det första säger:
$\boldsymbol{S}$ är ett linjärt rum.

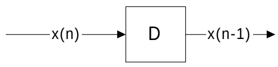
Sekvenserna δ_k bildar en bas för detta rum: $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta_k$ för varje $x\in\boldsymbol{S}$.

T.ex. är $\theta = \sum_{k=0}^{\infty}\delta_k$.

Operationer på $\boldsymbol{S}$ åskådliggörs i blockdiagram:

Addition: 

Multiplikation med tal: 

Fördröjning: 

2. Z-TRANSFORM

Det viktigaste verktyget för undersökningen av diskreta signaler och ffa av diskreta filter $\mathscr{F}: \boldsymbol{S}\to\boldsymbol{S}$ är (som i det tidskontinuerliga fallet) en transformation, nämligen:

DEFINITION

z-TRANSFORMEN till en sekvens $x\in\boldsymbol{S}$ definieras som $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$.

Även nu skriver vi $x\supset X$ för "x har z-transformen X" resp
$X\subset x$ för "X är z-transformen till x".

ANMÄRKNING

Om $x(n) = 0$ för $n<0$ så är z-transformen till x en potensserie i $\frac{1}{z}$. Om den konvergerar i någon punkt z_0 så konvergerar den i $\{z: |z| > |z_0|\}$ och är där en analytisk funktion; jämför med Laplace-transformation (analytisk i ett halvplan $Re\, z > \alpha$).
I allmänhet är konvergensområdet en cirkelring. Det behandlas i "analytiska funktioner" ("Laurent-serier"). Vi gör det (än så länge) enkelt för oss: Vi betraktar bara sekvenser x som har en z-transform X (dvs $D_X \neq \emptyset$) men vi studerar inte vilka det är. Det är klart i varje konkret fall, t.ex. är $x(n) = e^{n^2}$ ej med.

F.o.m. nu inskränker vi oss dock på "sekvenser med nedåt begränsat stöd" och det räcker gott för tillämpningarna:

DEFINITION (”right sided sequences”)

$\boldsymbol{S}_{rs} = \left\{ x \in \boldsymbol{S}: \text{ det finns ett } M \text{ så att } x(n) = 0 \text{ för } n < M \right\}$.

ANMÄRKNING

1) Även z-transformationen är injektiv, dvs för $x, y \in S_{rs}$ gäller:
   Om $x \supset X, y \supset Y$ och $X(z) = Y(z)$ för $r_0 < |z| < r_1$ så är $x = y$.
2) Den inversa transformationen kan explicit anges (som kurvintegral i det komplexa planet, ”anal.fkt”), men vi räknar m.h.a. formelsamlingen, som vi skapar nedan.
3) En signal $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\delta(t-n)$ har Laplacetransformen $X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-sn}$
   och det är lika med z-transformen av $x(n)\theta(n)$ med $z = e^s$!

EXEMPEL

$\delta \supset 1, \quad \theta \supset \dfrac{z}{z-1}$.

bev: $\delta(n) \supset \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1$, ty $\delta(0) = 1$ och $\delta(n) = 0$ för $n \neq 0$ och

$$\theta(n) \supset \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$ (geom. serie, konvergent då $|z| > 1$).

SATS (regler för z-transformation). För $x, x_1, x_2 \in \boldsymbol{S}_{rs}$, $c \neq 0$, $c_1, c_2 \in \boldsymbol{C}$ gäller:

1) $c_1 x_1 + c_2 x_2 \supset c_1 X_1 + c_2 X_2$ (linearitet). $(x \supset X, x_1 \supset X_1, x_2 \supset X_2)$
2) $D^N x \supset z^{-N} X(z)$ ($N \in \mathbb{Z}$, fördröjningsregel).
3) $c^n x(n) \supset X\left(\tfrac{z}{c}\right)$ (dämpningsregel).
4) $(n-1)x(n-1) \supset -X'(z)$ (deriveringsregel).

bev: 1) $c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) \supset \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n)\right) z^{-n} =$

$$= c_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) z^{-n} + c_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) z^{-n} = c_1 X_1(z) + c_2 X_2(z).$$

2) $D^N x(n) = x(n-N) \supset \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-N) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-N) z^{-(n-N)} z^{-N} = [k = n-N]$

$$= z^{-N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} = z^{-N} X(z).$$

3) $c^n x(n) \supset \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(c^n x(n)\right) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(\tfrac{z}{c}\right)^{-n} = X\left(\tfrac{z}{c}\right)$.

4) $X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)z^{-k}\Rightarrow X'(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)(-k)z^{-k-1}=[k+1=n]$

$=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}(n-1)x(n-1)z^{-n}\subset-(n-1)x(n-1).$ vsv

Använd 2) och 3) på $\delta\supset 1$ och $\theta\supset\frac{z}{z-1}$ så får du:

EXEMPEL

$a)$ $\delta_N\supset z^{-N}$ b) $c^n\theta(n)\supset\dfrac{z}{z-c}$ c) $nc^n\theta(n)\supset\dfrac{cz}{(z-c)^2}$.

bev. av c): 2) och 4) ger: $nx(n)\supset -zX'(z)$, alltså $n\theta(n)\supset -z\left(1+\frac{1}{z-1}\right)'=\dfrac{z}{(z-1)^2}$

och 3) ger då att $c^n n\theta(n)\supset\dfrac{\frac{z}{c}}{\left(\frac{z}{c}-1\right)^2}=\dfrac{cz}{(z-c)^2}$ vsv

EXEMPEL

a) z-tranformera $\left(2^{-n}+n3^{-n}\right)\theta(n)$ b) Inverstranformera $\dfrac{2}{z-2}$ resp $\dfrac{z^2}{(z-1)^2(z-2)}$.

lösn: a) $\left(2^{-n}+n3^{-n}\right)\theta(n)\supset\dfrac{z}{z-\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{1}{3}z}{\left(z-\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2z}{2z-1}+\dfrac{3z}{(3z-1)^2}=\dfrac{18z^3-6z^2-z}{18z^3-21z^2+8z-1}.$

(tänk: hur skulle du inverstransformera detta??)

a) Antingen $\dfrac{2}{z-2}=-1+\dfrac{z}{z-2}\subset-\delta(n)+2^n\theta(n)=2^n\theta(n-1)$

eller $\dfrac{2}{z-2}=2z^{-1}\dfrac{z}{z-2}\subset 2D\left(2^n\theta(n)\right)=2^n\theta(n-1).$

$$\frac{z^2}{(z-1)^2(z-2)}=z\cdot\frac{z}{(z-1)^2(z-2)}=z\left(\frac{A}{z-1}+\frac{B}{(z-1)^2}+\frac{C}{z-2}\right)=\frac{-2z}{z-1}+\frac{-z}{(z-1)^2}+\frac{2z}{z-2}\subset$$

$$\subset-2\theta(n)-n\theta(n)+2^{n+1}\theta(n).$$

Även i det diskreta fallet är den viktigaste operationen faltningen:

DEFINITION

FALTNINGEN $x*y$ mellan två sekvenser $x,y\in\boldsymbol{S}_{rs}$ definieras genom

$$x*y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)y(n-k)\quad(n\in\mathbb{Z}).$$

ANMÄRKNING

1) $x*y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)y_k(n)$ är en ”viktad summa” av k-fördröjda y ($x(k)$ är vikter).

2) För sekvenser finns det ytterligare en finfin motivering för denna produkt: multiplicera två polynom eller två potensserier:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m = a_0 b_0 + \left(a_0 b_1 + a_1 b_0\right)x + \left(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0\right)x^2 + \cdots$$

$$+\underbrace{\left(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0\right)}_{=\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}} x^n + \cdots$$

alltså $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n * b_n\right) x^n$ (”Cauchy-produkten” av potensserier).

SATS

Faltningen $*$ är en kommutativ produkt på $\boldsymbol{S}_{rs}$ med ettan δ, dvs:
för $x, y, z \in \boldsymbol{S}_{rs}$, $a \in \boldsymbol{C}$ gäller:

1) $x * y = y * x \in \boldsymbol{S}_{rs}$
2) $x * (y * z) = (x * y) * z$
3) $x * (y + z) = x * y + x * z$
4) $(a\,x) * y = a(x * y)$
5) $x * \delta = \delta * x = x$

bev:

$$x * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y(n-k) = [n-k=m] = \sum_{m=\infty}^{-\infty} x(n-m) y(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m) x(n-m) = y * x(n),$$

$x * y \in \boldsymbol{S}_{rs}$ ty om $x(n) = 0$ för $n < M_1, y(n) = 0$ för $n < M_2$ så är $x * y(n) =$

$$= \theta(n - M_1 - M_2) \sum_{k=M_1}^{n-M_2} x(k) y(n-k)$$ (konvergent och = 0 för $n<M_1+M_2$, verifiera detta!).

Därmed är 1) visat. 5) fås direkt: $x * \delta(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) = x(n)$.

[igen: $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta_k$!]. Visa 2), 3), och 4) själv.

OBS: beviset ovan ger: $x * y(n) = \theta(n) \sum_{k=0}^{n} x(k) y(n-k)$ om $x(n) = y(n) = 0$ för $n < 0$.

Fördröjning kan uttryckas m.h.a. faltning:

SATS

$D^N x = x * \delta_N \quad (N \in \mathbb{Z},\ x \in \boldsymbol{S})$.

bev: $x * \delta_N(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \underbrace{\delta(n-N-k)}_{=\begin{cases} 0, \text{ då } k \neq n-N \\ 1, \text{ då } k = n-N \end{cases}} = x(n-N)$. vsv

Och nu *z*-transformationens jämte linearitet viktigaste egenskap: Den omvandlar den så viktiga men ack så svårhanterliga faltningen till en vanlig multiplikation: