STUDIO 6: VEKTORFÄLT

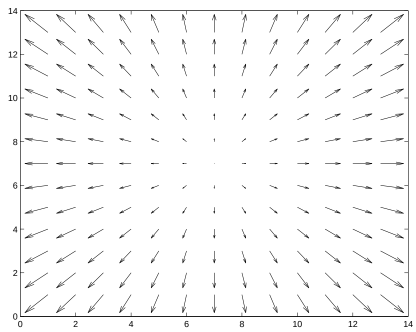
ANALYS OCH LINJÄR ALGEBRA, DEL C, K1/KF1/BT1, VT07

1. Vektorfält i $\mathbb{R}^2$ (och $\mathbb{R}^3$)

Du kan plotta vektorfält som i fig 15.1 och 15.2 i Adams sid 807 i Matlab genom att utnyttja funktionen **quiver**. Med raderna

» x=-3:.5:3;
» y=-3:.5:3;
» [X,Y]=meshgrid(x,y);
» quiver(X,Y,X,Y)

erhålls figuren

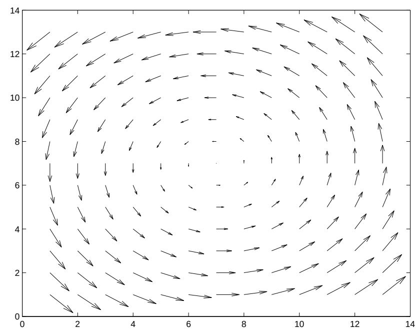


Figur 1. Pilarnas riktning visar fältets riktning.

Om Du istället skriver

» quiver(X,Y,-Y,X)

erhålls figuren

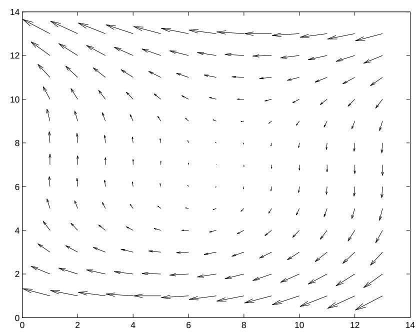


FIGUR 2. Ett rent rotationsfält.

Du kan nu själv definiera Ditt vektorfält, tex .

» quiver(X,Y,-2*Y.$\hat{2}$,Y-3*X)

resulterar i figuren



FIGUR 3. Ett vektorfält med både divergens och rotation.

Vi erinrar oss att för ett vektorfält $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, med $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ defineras divergensen som

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = \nabla \cdot f$$

och rotationen som

$$\operatorname{rot} f = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = \nabla \times f$$

Uppgift 1 Beräkna divergensen och rotationen för de tre vektorfälten ovan.

Till vissa vektorfält $F(x,y)$ finns en potential $\Phi(x,y)$ som är en skalär funktion och som är relaterad till F genom

$$\nabla \Phi(x,y) = F(x,y).$$

Uppgift 2 Visa att potentialen till

$$F(x,y) = -\frac{(x,y)}{x^2+y^2}$$

ges av

$$\Phi(x,y) = \log\left(x^2+y^2\right), \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Uppgift 3 Beräkna div $F(x,y)$.

Uppgift 4 Visa att F är rotationsfritt, dvs att

$$\operatorname{rot} F(x,y) = \operatorname{rot}\left(-\frac{(x,y)}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

Exempel 1 Magnetfältet H kring en ström som är riktad genom origo ut från xy-planet ges av

$$H(x,y) = C\frac{(-y,x)}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Uppgift 5 Beräkna div$H(x,y)$ och rot$H(x,y)$.

För ett vektorfält $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, med $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$ definierar vi

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \nabla \cdot f$$

och rotationen

$$\operatorname{rot} f = (\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}) = \nabla \times f$$

Vi noterar den stora skillnaden att vi övergång till $\mathbb{R}^3$ så blir rotationen en vektor. Den skarpögde identifierar tredje komponenten i denna rotation som just rotationen i $\mathbb{R}^2$. I själva verket så blir rotationen i $\mathbb{R}^3$ av ett vektorfält i xy-planet $(0, 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})$.

Exempel 2 Elektrostatiska fält och gravitationsfält är på formen

$$F(x, y) = C\frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0),$$

där C är en konstant. Du kan själv fundera ut hur denna konstant ser ut hos Columb-fältet kring en laddad partikel.

Uppgift 6 Visa att fältet i Exempel 2 har en potential Φ genom att räkna ut denna.

Exempel 1 i 3D Magnetfältet H kring en ström som är riktat genom origo ut längs z-axeln ges av

$$H(x, y, z) = C\frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Uppgift 6 Beräkna $\operatorname{div} H$ och $\operatorname{rot} H$.

Om Du räknar rätt i denna uppgift har Du återupptäckt en klassisk lag i fysiken Ampères lag

$$\nabla \times H = 0, \quad x^2 + y^2 > 0.$$

Denna är en av de berömda Maxwells ekvationer i elektromagnetism.

Uppgift 7 Nedan ges ett skript som ger exempel på visualisering av gradienten (med hjälp av quiver) och ytan (med nivåkurvor) till funktionsytan

$$z = f(x, y) = x\, e^{-x^2 - y^2}.$$

```
» [X,Y] = meshgrid(-2:.2:2);
» Z = X.*exp(-X.2̂ - Y.2̂);
» [DX,DY] = gradient(Z,.2,.2);
» contour(X,Y,Z)
» hold on
» quiver(X,Y,DX,DY)
» colormap hsv
» hold off
```

Funktionen **gradient** beräknar gradienten numeriskt. Du kan naturligtvis användan Din egen Jacobi.m här.

Skriptet nedan plottar ytan med ytnormaler till ytan

$$S : S(x, y) = (x, y, x\, e^{-x^2-y^2}), \quad (x, y) \in \Omega = [-2, 2] \times [-1, 1].$$

» [X,Y] = meshgrid(-2:0.25:2,-1:0.2:1);
» Z = X.* exp(-X.2̂ - Y.2̂);
» [U,V,W] = surfnorm(X,Y,Z);
» quiver3(X,Y,Z,U,V,W,0.5);
» hold on
» surf(X,Y,Z);
» colormap hsv
» view(-35,45)
» axis ([-2 2 -1 1 -.6 .6])
» hold off

Testa dessa skript. Testa sedan dessa på:

(a) Paraboloiden $f(x, y) = x^2 + y^2$.

(b) Konen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) Sadeln $f(x, y) = x^2 - y^2$

(d) Sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.