MATEMATISKA VETENSKAPER

Lösningar Analys och linjär algebra del C TMV035 K1/Bt1/Kf1 070315

1. Kroppens massa ges av trippelintegralen

$$M(K) = \int\int\int_V \rho(x,y,z)\,dxdydz.$$

Byte till sfäriska koordinater ger

$$M(K) = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^4\cos^4\varphi r^2\sin\varphi\,drd\varphi d\theta = \frac{\pi}{2}[-\frac{1}{5}\cos^5\varphi]_0^{\pi/2}[\frac{r^7}{7}]_0^2 = \frac{64\pi}{35}.$$

2. Bivillkoret kan även skrivas $x^2+y^2=4$. Vi parametriserar: $s(t) = (x(t),y(t)) = (2\cos t, 2\sin t)$, $0t \le 2\pi$. Vi studerar sedan

$$g(t) = f(x(t),y(t)) = \cos t\sin t = \frac{1}{2}\sin 2t$$

Derivering ger

$$g'(t) = \cos 2t$$

som har nollställen då $t=\pi/4$, $t=3\pi/4$, $t=5\pi/4$ och $t=7\pi/4$. I termer av x och y motsvaras detta av punkterna $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ och $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$. Största värde 2 antas i $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ och i $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ och minsta värde -2 antas i $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ och $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

3. Låt $F(x,y) = (2xy^3-3x^2y^2+16xy,\ 3x^2y^2-2x^3y+8x^2)$.
(a) Om det finns en potential Φ skall det gälla

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2xy^3-3x^2y^2+16xy, \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 3x^2y^2-2x^3y+8x^2.$$

Integration av första ekvationen ger

$$\Phi(x,y) = x^2y^3-x^3y^3+8x^2y+\varphi(y).$$

Derivering map y och jämförelse med andra ekvationen ger

$$\Phi(x,y) = x^2y^3-x^3y^3+8x^2y+C.$$

(b) Eftersom F är konservativt fås linjeintegralen

$$\int_\gamma F\cdot d\mathbf{r} = \Phi(2,2)-\Phi(1,0) = 64.$$

4. (a) En ON-bas i $\mathbb{R}^3$ är tre vektorer som är parvis ortogonala och har längd (norm) 1.
(b) Utgå från v_1, v_2 och v_3 i $\mathbb{R}^3$. Låt $u_1 = v_1/\|v_1\|$. Låt sedan $\tilde{u}_2 = v_2 - P_{u_1}v_2$, där $P_{u_1}v_2$ är ortogonala projektionen av v_2 på u_1. Låt $u_2 = \tilde{u}_2/\|\tilde{u}_2\|$. Enligt samma procedur bildar vi nu $\tilde{u}_3 = u_3 - P_{u_1}v_3 - P_{u_2}v_3$ och $u_3 = \tilde{u}_3/\|\tilde{u}_3\|$. Trippeln $\{u_1, u_2, u_3\}$ utgör nu en ON-bas i $\mathbb{R}^3$.