MATEMATIK	Datum: 2010-10-21	Tid: förmiddag
Chalmers	Hjälpmedel: inga	
A.Heintz	Telefonvakt:	Tel.: 0762-721861

Lösningar till **tenta i TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.**

1. **Sats** Ange geometriska beviset till gränsvärdet $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1.$ (6p)

2. **Gränsvärde och kontinuitet.** 1) Ange definition för en funktion kontinuerlig i en inre punkt på definitionsintervall.

   2) Betrakta följande funktion:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x}, & \text{för } 0 < x \leq 0.25 \\ \exp(x) & \text{för -0.25} \leq x \leq 0 \end{cases}$$

   Bestäm om f är kontinuerlig i origo eller inte och ange ett fullständigt bevis. (6p)

   En funktion f är kontinuerlig i en inre punkt a på ett intervall om gränsvärdet $\lim_{x\to a} f(x)$ existerar och $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

   Vi beräknar högergränsvärdet i origo: $\lim\limits_{x\to 0+} = \lim\limits_{x\to 0+} (1+x)^{1/x}$. Det är indefinit form av typ $(1)^{\infty}$. Sådana gränsvärden lösas med att betrakta $\ln(f(x))$.

   $\ln\left((1+x)^{1/x}\right) = \frac{1}{x}\ln(1+x)$. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}(x+O(x^2)) = \lim_{x\to 0+}(1+O(x)) = 1$.

   Detta medför att $\lim_{x\to 0+}(1+x)^{1/x} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{1/x}\right)\right) = e$.

   Vänstergränsvärde är $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\exp(x) = 1$.

   Detta medför att gränsvärdet $\lim_{x\to 0} f(x)$ existerar inte i origo och funktionen f är inte kontinuerlig i origo.

3. **Derivering.** Beräkna derivatan av funktionen

   $f(x) = \dfrac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{(1-x^3)}}$

   $\frac{d}{dx}(\ln(1-\sqrt{x})) = -\frac{1}{2\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}$; $\frac{d}{dx}\sqrt{(1-x^3)} = -\frac{3}{2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}$; (4p)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{(1-x^3)}}\right) = \frac{\left(\frac{-1}{2\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}\right)\sqrt{(1-x^3)} - \left(\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\right)\left(-\frac{3}{2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\right)}{(1-x^3)}$$

4. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen :

   $g(x) = \begin{cases} 8x - 12x^2 + 4x^3, & \text{för } 0 < x \leq 2 \\ 3x + 4x^2 + x^3, & \text{för } -3 \leq x \leq 0 \end{cases}$

   definierad på intervallet $[-2,\ 3]$. Bestäm punkter där funktionen inte är kontinuerlig, singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum på det intervallet (om de existerar). (6p)

Bestäm böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är växande, avtagande, konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. (4p)

Vi observerar att $\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0-} g(x) = g(x)$. Detta medför att g är kontinuerlig i origo och i hela slutna definitionsintervallet. Det måste då anta sina absoluta maximum och minimum.

Beräkna derivatan av g utnför origo:

$$\frac{d}{dx}g(x) = \begin{cases} 4\left(3x^2 - 6x + 2\right), & \text{för } 0 < x \leq 2 \\ \left(8x + 3x^2 + 3\right), & \text{för } -3 \leq x < 0 \end{cases}, \text{ roots: } \begin{matrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} + 1 \\ 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{matrix} =$$

Kritiska punkter där $\frac{d}{dx}g(x) = 0$ är rötter till $(3x^2 - 6x + 2)$ för $0 < x \leq 2$ och rötter till $(8x + 3x^2 + 3)$ för $-3 \leq x < 0$.

Rötter till $(3x^2 - 6x + 2)$ är $x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3} + 1$ och $x_2 = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$ som båda hör till intervallet $0 < x \leq 2$. Rötter till $(8x + 3x^2 + 3)$ är $x_3 = \frac{1}{3}\sqrt{7} - \frac{4}{3}$ och $x_4 = -\frac{1}{3}\sqrt{7} - \frac{4}{3}$ som båda höt till intervallet $-3 \leq x < 0$. g har fyra kritiska punkter: x_1, x_2, x_3, x_4. De stär på reella axeln i följande ordning: (x_4, x_3, x_2, x_1).

Vänsterderivata i origo är 2 och högerderivata i origo är 3. Origo är en singulär punkt till g.

Origo är inte en lokal extrempunkt eftersom vänster och höger derivatan har samma tecken.

$$\frac{d}{dx}g(x) = \begin{cases} 12\left(x - x_2\right)\left(x - x_1\right), & \text{för } 0 < x \leq 2 \\ 3\left(x - x_4\right)\left(x - x_3\right), & \text{för } -3 \leq x < 0 \end{cases}$$

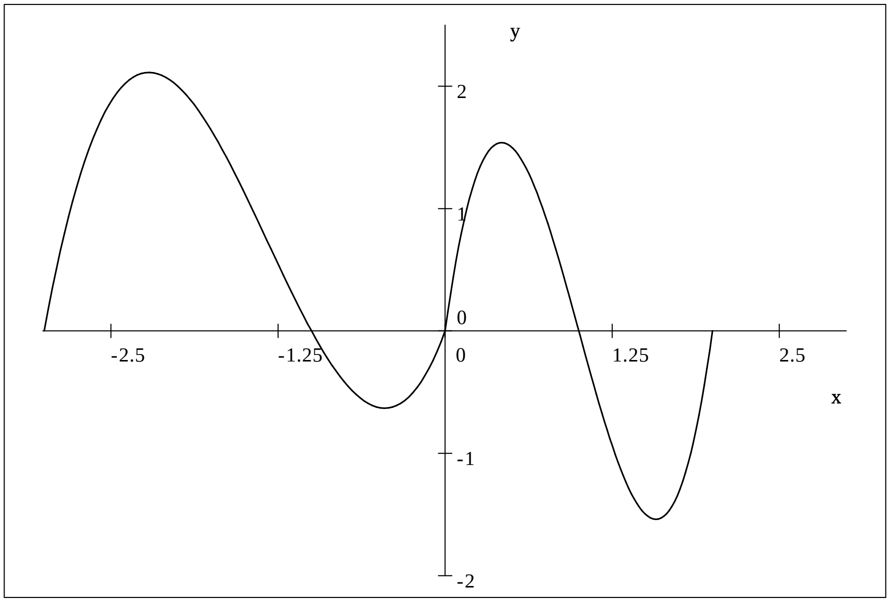
$$\frac{d^2}{dx^2}g(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}4\left(3x^2 - 6x + 2\right) = 24(x-1), & \text{för } 0 < x \leq 2 \\ \frac{d}{dx}\left(8x + 3x^2 + 3\right) = 6(x + 4/3), & \text{för } -3 \leq x < 0 \end{cases} \quad x_5 = -4/3, \text{ och}$$

$x_6 = 1$ är nollställen till $g''(x)$.

Vi introducerar två tabeller där vi sammanställer derivatans egenskaper och funktions beteende.

x		x_4		x_3		0		x_2		x_1	
f	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	kont.	$\nearrow$	lok.max	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$
f'	> 0	0	< 0	0	> 0	sing.	> 0	0	< 0	0	> 0

x		$x_5 = -4/3$		0		$x_6 = 1$	
f	konkav ner.	böjningsp.	konkav upp.	sing.punkt	konk. ner.	böjningsp.	konkav upp.
f''	< 0	0	> 0	sing.punkt	< 0	0	> 0



5. **Taylors polynom.** Approximera funktionen: $f(x) = \sqrt{1+x}$ med Taylors polynom av grad 2 runt punkten $a = 0$ med felterm på Lagranges form. Uppskatta hur stor är feltermen i fall $x = 0,1$. (6p)

   $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(x-a)^3$

   $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$

   $\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{1+x}\right) = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{x+1}\right)^{-3/2}\Big|_{x=0} = -\frac{1}{4}$

   $\frac{d^3}{dx^3}\left(\sqrt{1+x}\right) = \frac{3}{8}(x+1)^{-5/2}\Big|$

   $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16(s+1)^{5/2}}x^3$; feltermen $R(s) = \frac{1}{16(s+1)^{5/2}}x^3$

   För $x = 0,1$.

   $\sqrt{1+x} = 1 + 0.05 - (0.01)\frac{1}{8} + \frac{1}{16(s+1)^{5/2}}0.001 = 1.0488 + R$

   Där $0 < R < R(0) = \frac{1}{16}0.001 = 6.25 \times 10^{-5}$ eftersom $R(s)$ är avtagande funktion på intervallet $(0, 0.1)$

6. **Gränsvärde.** Beräkna gränsvärdet: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos(3x)}\right)$ (6p)

   Du får använda l'Hôpitals regel eller Taylors polynom.

   $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos(3x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+O(x^4)}{1-(1-\frac{1}{2}(3x)^2+O(x^4))}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+O(x^4)}{+\frac{1}{2}(3x)^2+O(x^4))}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+O(x^2)}{+\frac{9}{2}+O(x^2))}\right) = 2/9$

7. **Geometri i rummet.** Skriv en ekvation på standart form för linjen genom punkten med koordinater $(2, -5, 3)$ och parallell med skärningslinen av två givna plan:

   $2x - y + 3z - 1 = 0$; och $5x + 4y - z - 7 = 0$. (6p)

Normalerna $\overrightarrow{N_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\overrightarrow{N_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ till givna plan är vinkelräta till sökta linjen. Detta gör att riktningsvektorn $\overrightarrow{V}$ till sökta linjen måste vara vinkelrät mot $\overrightarrow{N_1}$ och $\overrightarrow{N_2}$. Den kan då väljas som $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}$.

Standartakvationer till sökta linjen är då $\frac{x-2}{V_x} = \frac{y+5}{V_y} = \frac{z-3}{V_z}$.

$$\overrightarrow{V} = \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \overrightarrow{i} \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} - \overrightarrow{j} \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} + \overrightarrow{k} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$-11\overrightarrow{i} + 17\overrightarrow{j} + 13\overrightarrow{k} = \begin{bmatrix} -11 \\ 17 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Linjens ekvationer är: $\frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}$.

8. **Geometri i rummet.** Bestäm minimala avståndet mellan två linjer:
$\dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-9}{-1}$ och $\dfrac{x-3}{-7} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$. (4p)

Allmänt svar: om linjerna har vektorekvationer: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_1 + t\overrightarrow{v}_1$ och $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_1 + t\overrightarrow{v}_1$.
Beräkna vektorprodukt $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2$.

Avståndet blirm $d = \dfrac{|(\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2) \cdot M|}{|M|}$.

I vårt fall $\overrightarrow{r}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{r}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$$\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 = \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -7 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 4j + 16k + 8i = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

För att göra beräkningar lite kortare, får man ta $\overrightarrow{M} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

$$(\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2) \cdot \overrightarrow{M} = \left(\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 42$$

$$\left|\overrightarrow{M}\right| = \left| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$d = \frac{\left|(\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2) \cdot \overrightarrow{M}\right|}{\left|\overrightarrow{M}\right|} = \frac{42}{\sqrt{21}} = 2\sqrt{21}$$

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 50 ; **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40