MATEMATIK	Datum: 2012-10-24	Tid: förmiddag
Chalmers	Hjälpmedel: inga	
A.Heintz	Telefonvakt: Christoffer Standar,	Tel.: 0703-088304

Lösningar till tenta i TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats.** Formulera och bevisa feluppskattningen för linjära approximationen. **(6p)**

2. **Kontinuitet.** i) Formulera definitionen på funktion kontinuerlig i en punkt.

   ii) Två funktioner f och g,är båda odefinierade i punkten $x = 0$: $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ och $g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)\ln(1 + x)$.

   Bestäm om någon av dessa funktioner kan utvidgas till punkten $x = 0$ (d.v.s. om $f(0)$ eller $g(0)$ kan definieras i punkten $x = 0$) så att funktionen blir kontinuerlig i den punkten. I fall det är möjligt ange hur man kan göra det. **(6p)**

   Funktionen f är kontinuerlig i punkt a om $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

   $\lim_{x\to 0+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to +\infty} \arctan(y) = \pi/2$. $\lim_{x\to 0-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to -\infty} \arctan(y) = -\pi/2$. Det visar att gränsvärde $\lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ saknas och funktionen f kan inte utvidgas till $x = 0$.

   Funktionen $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ är begränsad för $x \neq 0$: $-1 \le \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$. Funktionen $\ln(1 + x)$ har gränsvärde $\lim_{x\to 0} \ln(1 + x) = 0$.

   Det gör att $-|\ln(1 + x)| \le \cos\left(\frac{1}{x}\right)\ln(1 + x) \le |\ln(1 + x)|$ där både $\lim_{x\to 0} |\ln(1 + x)| = 0$ och $\lim_{x\to 0} -|\ln(1 + x)|$ och squeeze theorem medför att $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\ln(1+x) = 0$. Man kan utvidga funktionen g till $x = 0$ med värdet $g(0) \overset{def}{=} 0$ och få en funktion kontinuerlig i origo enligt definition.

3. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen: $g(x) = \dfrac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[3]{(x-1)}}$ definierad för alla reella tal förutom $x = 1$.

   Bestäm asymptoter till grafen om de finns. Bestäm singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum om de finns. **(6p)**

   Bestäm de intervall där funktionen är växande, avtagande, böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. **(4p)**

   Vi observerar att $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[3]{(x-1)}} = +\infty$ och $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[3]{(x-1)}} = -\infty$. Det finns inga horisontella asymptoter.

   Vi tester om det finns lutande asymptoter. Beräknar $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[3]{(x-1)}}\dfrac{1}{x} = 0$.

   $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[3]{(x-1)}}\dfrac{1}{x} = 0$.

   Det finns inga lutande asymptoter heller.

$\lim_{x \to 1+} \dfrac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[3]{(x-1)}} = +\infty$ och $\lim_{x \to 1-} \dfrac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[3]{(x-1)}} = -\infty$. Detta medför att det finns en vertikal asymptot $x = 1$ och grafen närmar sig den linjen när $x \to 1+$ och $x \to 1-$ på olika sätt: går oändligt uppåt från höger och oändligt neråt från vänster av $x = 1$.

Det betyder också att det finss inget absolut maximum och inget absolut minumum hos funktionen.

Vi beräknar derivatan av $f(x)$ och söker kritiska punkter

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[3]{(x-1)}}\right) = \frac{2}{3x}\frac{\sqrt[3]{x}^2}{\sqrt[3]{x-1}} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{x}^2}{(x-1)\sqrt[3]{x-1}} = \tfrac{1}{3}(x-1)^{-1}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^{-1}x^{-1}(x-2)\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$$
$$= \frac{1}{3}(x-1)^{-4/3}x^{-1/3}(x-2).$$

Endast rot av första derivatan är kritisk punkt $x_1 = 2$.Derivatan är positiv för x nära 2 och $x > 2$. Derivatan är negativ för x nära 2 och $x < 2$.Första derivatans test medför att funktionen har ett lokalt minimum $f(2) = 2^{\frac{2}{3}}$ i den punkten. Det är inte absolut minimum enligt tidigare analys. Derivatan är odefinierad i punkten $x_2 = 0$ som är singulär punkt. Derivatan är positiv för små positiva x och är negativ för små positiva x.Detta medför enligt första derivatans test att funktionen har ett lokalt maximum $f(0) = 0$ i singulära punkten $x_2 = 0$.

Derivatan $f'(x)$ är positiv för $-\infty < x < 0$, negativ för $0 < x < 1$, negativ för $1 < x < 2$, positiv för $2 < x < +\infty$. Detta medför att funktionen växer för $-\infty < x < 0$, avtagar för $0 < x < 1$, avtagar för $1 < x < 2$, växer för $2 < x < +\infty$.

Beräknar andra derivatan:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[3]{(x-1)}}\right) = \frac{4}{9}\frac{\sqrt[3]{x}^2}{\sqrt[3]{x-1}\,(x^2-2x+1)} - \frac{4}{9}\frac{\sqrt[3]{x}^2}{\sqrt[3]{x-1}\,(x^2-x)} - \frac{2}{9x^2}\frac{\sqrt[3]{x}^2}{\sqrt[3]{x-1}} =$$
$$\left(-\frac{2}{9}\right)(x-1)^{-2}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^{-1}x^{-2}\left(x^2-4x+1\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 =$$
$$\left(-\tfrac{2}{9}\right)(x-1)^{-7/3}x^{-4/3}\left(x^2-4x+1\right)$$

Andra derivatan är odefinierad i $x = 0$.

Vi söker rötter av andra derivatan som är rötter till polynom $x^2 - 4x + 1$. Det har rötter: $x_3 = 2 - \sqrt{3}$, $x_4 = 2 + \sqrt{3}$.

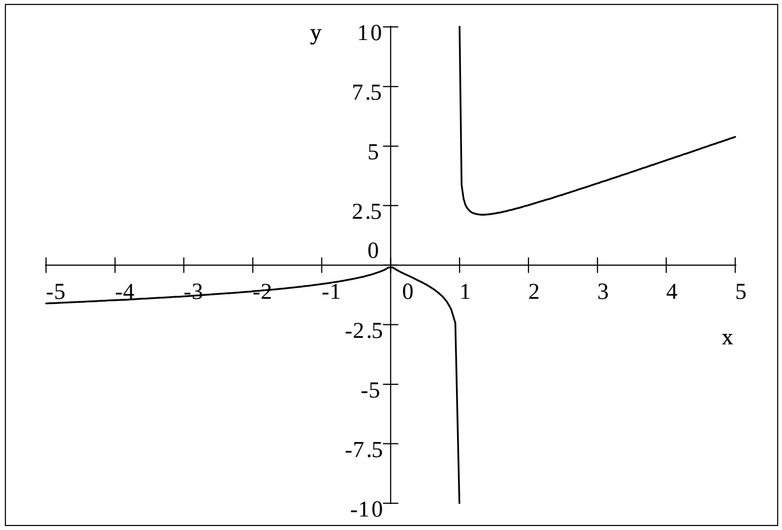
Andra derivatan $f''(x)$ är positiv för $-\infty < x < 0$, positiv för $0 < x < 2 - \sqrt{3}$, negativ för $2 - \sqrt{3} < x < 1$,

positiv för $1 < x < 2 + \sqrt{3}$, negativ för $2 + \sqrt{3} < x < +\infty$. Detta medför att f är konkav uppåt för $-\infty < x < 0$, konkav uppåt för

$0 < x < 2 - \sqrt{3}$, konkav nedåt för $2 - \sqrt{3} < x < 1$, konkav uppåt för $1 < x < 2 + \sqrt{3}$, konkav nedåt för $2 + \sqrt{3} < x < +\infty$.

Andra derivatan byter tecknet i punkter $2+\sqrt{3}$och i $2-\sqrt{3}$, och första derivatan existerar i dessa punkter så det finns tangent till

grafen i x_3 och i x_4 och funktionen har böjningspunkter i x_3 och i x_4. Grafen till $f(x) = \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[3]{(x-1)}}$är



4. **Taylors polynom.** Betrakta funktionen $f(x) = \sin(\pi/3 + x)$ och dess approximation med Taylors polynom av grad två för $x = 0,1$. Uppskatta feltermen på Lagranges form för den approximationen och ange intervallet där värdet $\sin(\pi/3 + 0,1)$ måste ligga enligt dessa uppskattningar. **(6p)**

   Taylors polynom approximerar en funktion när apunkt a på följande sätt:

   $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + E_2(x)$, med feltermen $E_2(x) = \frac{f'''(s)}{6}(x-a)^3$, där punkten s ligger mellan a och x.

   I fall med konkreta funktionen $a = \pi/3$, $x - a = 0,1$; $f(a) = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. $f'(a) = \cos(\pi/3) = 1/2$; $f''(a) = -\sin(\pi/3) = -1/2$; $f'''(s) = -\cos(s)$.

   $\sin(\pi/3 + 0,1) = \sqrt{3}/2 + 0,5 \times 0,1 + (1/2)(-1/2) \times (0,1)^2 + (1/6)(-\cos(s))(0,1)^3$

   $= \sqrt{3}/2 + 0,05 - 0,0025 + (1/6)(-\cos(s))(0,001) = \sqrt{3}/2 + 0,0475 + (-\cos(s))(0,001)/6$

   $\cos(s)$ är avtagande funktion för $\pi/3 < s < \pi/3 + 0,1$. Detta medför att $\cos(s) \leq \cos(\pi/3) = 0,5$.

   $E_2(x) < 0$, $|E_2(x)| \leq (0,0005)/6$. Detta medför att $\sin(\pi/3 + 0,1)$ ligger i intervallet $\left(\sqrt{3}/2 + 0,0475 - (0,0005)/6, \sqrt{3}/2 + 0,0475\right)$.

5. **Gränsvärden och Taylors polynom.**

   Beräkna gränsvärdet: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\sin(x-1)}{(1-\exp(x-1))\ln^2(x)}\right)$ **(6p)**

   Vi kommer att använda Taylor polynom med felterm på stora O from for att beräkna gränsvärdet.

   Inför ny variabel $y = x-1$. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\sin(x-1)}{(1-\exp(x-1))\ln^2(x)}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{y-\sin(y)}{(1-\exp(y))\ln^2(1+y)}\right)$

   Vi lägger märke till att $\sin(y) = y - y^3/6 + O(y^5)$; $\exp(y) = 1 + y + O(y^2)$; $\ln(1+y) = y + O(y^2)$;och sätter in desssa uttryck in i uttrycket för lim:

   $$\lim_{y\to 0}\left(\frac{y-\sin(y)}{(1-\exp(y))\ln^2(1+y)}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{y-(y-y^3/6+O(y^5))}{(1-(1+y+O(y^2)))(y+O(y^2))(y+O(y^2))} =$$

   $\lim_{y\to 0}\frac{y^3/6+O(y^5)}{(-y+O(y^2))(y+O(y^2))(y+O(y^2))} = \lim_{y\to 0}\frac{y^3/6+O(y^5)}{(-y^3+y^2O(y^2)+yO(y^4)+O(y^6))} = \lim_{y\to 0}\frac{y^3/6+O(y^5)}{-y^3+O(y^4)} =$
   $\lim_{y\to 0}\frac{1/6+O(y^2)}{-1+O(y)} = -1/6$

6. **Geometri i rummet.** Tre punkter är givna $A = (1, -1, 2)$, $B = (5, -6, 2)$, $C = (1, 3, -1)$. Beräkna avståndet mellan punkten B och linjen genom punkterna A och C. **(6p)**

Sökta avståndet kan beräknas på två sätt.

1) Vi kan framställa vektorn $\overrightarrow{AB}$ som summa: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$ där $\overrightarrow{u} = \left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right) \overrightarrow{AC}$ - är vektor projektion av $\overrightarrow{AB}$ på $\overrightarrow{AC}$ och vektor $\overrightarrow{w}$ är vinkelrät mot $\overrightarrow{AC}$. Avståndet mellan B och linjen genom punkterna A och C : $d = |\overrightarrow{w}| -$ *är* längden av vektorn $\overrightarrow{w}$.

2) Annan lösning använder formeln för avståndet mellan en punkt B och linjen genom punkten A med riktningsvektorn $\overrightarrow{AB}$:

$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|}$

Vi använder andra lösning. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = \sqrt{225 + 144 + 256} = \sqrt{625} = 25.$

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$ **Svar:** $d = 25/5 = 5.$

7. **Geometri i rummet.** Ange en ekvation för planet genom två givna punkter $M = (1, -1, -2)$ och $P = (3, 1, 1)$ så att det är vinkelrät mot planet med ekvationen $x - 2y + 3z - 5 = 0$. **(6p)**

Vi söker ekvation för ett plan genom en punkt, t.ex. M med en normalvektor $\overrightarrow{N}$:

$\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{M}\right) \cdot \overrightarrow{N} = 0$. Normalvektorn $\overrightarrow{N}$ här är okänd.

Den måste vara vinkelrät mot normalvektron $\overrightarrow{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ till givna planet och till vektorn $\overrightarrow{MP} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ mellan punkter M och P som ligger i sökta planet.

Längden av normalvektorn spelar ingen roll för planets ekvation, så vi kan välja $\overrightarrow{N} = 1/3\left(\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{n}\right) = 1/3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1/3 \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 1/3 \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Sökta planet har ekvation $4(x-1)-(y+1)-2(z+2)=0$
eller $4x-y-2z-9=0$.

8. **Vektorer.** Vektorer $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ har längder: $|\overrightarrow{a}|=3$; $\left|\overrightarrow{b}\right|=5$.

   Bestäm värden av parametern λ för vilka vektorer $\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$ och $\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{b}$ blir vinkelräta mot varandra. **(4p)**

   Skalär produkt av vektorer $\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$ och $\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{b}$ måste vara noll för att ha dem vinkelräta mot varandra.
   $\left(\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{b}\right)=0$; $\left(\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{b}\right)=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}-\lambda\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\lambda\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-\lambda^2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}=$
   $|\overrightarrow{a}|^2-\lambda^2\left|\overrightarrow{b}\right|=0$; $9-\lambda^2 25=0$; **Svar:** $\lambda=\pm\frac{3}{5}$.

   Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 50 ; **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40