MATEMATIK	Datum: 2013-10-23	Tid: förmiddag
Chalmers	Hjälpmedel: inga	
A.Heintz	Telefonvakt: Jacob Leander,	Tel.: 0703-088304

Lösningar till tenta i TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats.** Formulera och bevisa första l'Hopitals regel. **(6p)**

   Kolla bevis i boken.

2. **Kontinuitet.** **(6p)**

   i) Formulera definitionen på en funktion kontinuerlig i en punkt.

   ii) Två funktioner f och g,är båda odefinierade i punkten $x = 0$: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)(\exp(x) - 1)$ och $g(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)x$.

   Bestäm om någon av dessa funktioner kan utvidgas till punkten $x = 0$ (d.v.s. om $f(0)$ eller $g(0)$ kan definieras i punkten $x = 0$) så att funktionen blir kontinuerlig i den punkten. I fall det är möjligt ange hur man kan göra det. Funktionen f är odefinierad i punkten $x = 0$: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)(\exp(x) - 1)$.

   (6p)

   Lösning.

   i) Funktion f definierad på ett öppet intervall kring punkten a är kontinuerlig om $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

   ii) $-(\exp(x) - 1) \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right)(\exp(x) - 1) \leq (\exp(x) - 1)$ eftersom $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$. $\lim_{x\to 0}(\exp(x) - 1) = 0$. Instängningssatsen medför att $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)(\exp(x) - 1) = 0$.

   Funktionen f är kontinuerlig på reella linjen utan punkten $x = 0$. Den kan definieras i punkten $x = 0$ som $f(0) = 0$ och blir kontinuerlig på hela reella linjen.

   Funktionen $g(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)x$ saknar gränsvärde då $x \to 0$. Det följer från att högergränsvärdet är $\lim_{x\to 0+} \exp\left(\frac{1}{x}\right)x = \infty$,och vänstergränsvärdet $\lim_{x\to 0-} \exp\left(\frac{1}{x}\right)x = 0$. Vänstergränsvärdet är självklar, betrakta högergränsvärdet: $= x\exp\left(\frac{1}{x}\right) = \dfrac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}$ är obestämd form av typ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Vi använder l'Hôpitals regel $\lim_{x\to 0+}\left(\dfrac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}\right) = \lim_{x\to 0+}\left(\dfrac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}\right) = \lim_{x\to 0+}\left(\dfrac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{1}\right) = \infty$.

   Funktionen g kan inte definieras i punkten $x = 0$ så att den skulle bli kontinuerlig.

3. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen:

$$g(x) = \begin{cases} 5x + 3x^2 + \frac{1}{3}x^3, & x < 0 \\ xe^{-x}, & 0 \leq x \end{cases}$$

   Bestäm punkter där funktionen inte är kontinuerlig, singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum om de finns. **(6p)**

Bestäm de intervall där funktionen är växande, avtagande, böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. **(4p)**

Lösning. Funktionen g är kontinuerlig på hela reela linjen eftersom i punkter utanför origo den är ett polynom eller summan av produkter av kontinuerliga funktioner. Den är också kontinuerlig i origo eftersom $\lim_{x\to 0+} g(f) = \lim_{x\to 0-} g(f) = 0$.

$$g'(x) = \begin{cases} 6x + x^2 + 5, & x < 0 \\ e^{-x} - xe^{-x}, & 0 \le x \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} (x+5)\,(x+1)\,, & x < 0 \\ (e^{-x})\,(1-x)\,, & 0 \le x \end{cases}$$

Vänster derivata i origo är lika med 5, höger derivata i origo är 1. Funktionen saknar derivatan i origo och $x = 0$ är en singulär punkt.

Kritiska punkter är: $x_1 = -5$, $x_2 = -1$, $x = 1$.

$f'(x)$ ändrar tecknet från minus till plus i $x_1 = -5$. Detta medför att f har ett lokalt maximum i x_1.

$f'(x)$ ändrar tecknet från plus till minus i $x_2 = -1$. Detta medför att f har ett lokalt minimum i x_2.

$f'(x)$ är positiv på båda sidor av singulära punkten i origo. Detta medför att f har inget lokat extremum i x_2

x		-5		-3		-1		0		1
$f(x)$	$\nearrow \cap$	lok. max.$\cap$	$\searrow \cap$	böjning	$\searrow \cup$	lok.min.$\cup$	$\nearrow \cup$	sing.	$\nearrow \cap$	lok. max.$\cap$
$f'(x)$	$+ \searrow$	0	$- \searrow$	$-$	$- \nearrow$	0	$+ \nearrow$	finns ej	$+ \searrow$	0
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	finns ej	$-$	$-$

f är växande på interval $(-\infty, -5), (-1, 1)$, och är avtagande på intervall $(1, \infty), (-5, -1)$.

Funktionen $f(x) \to -\infty$, då $x \to -\infty$. Det finns inget absolut(globalt) minimum på grund av detta.

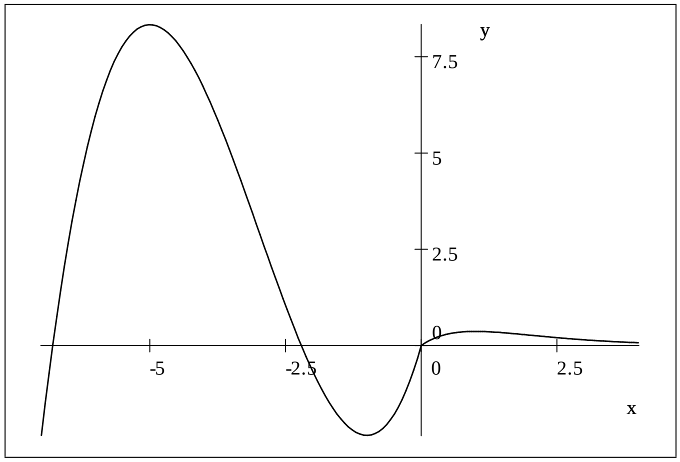
$f(-5) = -5 \cdot 5 + 3 \cdot 25 - \frac{1}{3}75 = 25(2 - 2/3) > 25$

$f(1) = \left(5x + 3x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)|_{x=1} = 5 + 3 - 1/3 < 8$. Detta medför att f har ett globalt maximum i $x_1 = -5$.

$$g''(x) = \begin{cases} 2x + 6 = 2(x+3), & x < 0 \\ xe^{-x} - 2e^{-x} = \ (e^{-x})\,(x-2) & 0 \le x \end{cases}$$

punkterna $x_3 = -3$ och $x_4 = 2$ är böjningspunkter, eftersom $g''(x) = 0$ där ($f'(x)$ och tangenten finns i dem och första derivata byter tecken där. Funktionen f har graf konkav uppåt på intervall $(-3, 0)$ och $(2, \infty)$, och är konkav neråt på intervall $(-\infty, -3)$ och $(0, 2)$.

Graf av funktionen:



4. **Linjär approximation.** Betrakta funktionen $f(x) = \arctan(x)$ och linjär approximation kring $a = 1$ för $x = 1,1$. Uppskatta feltermen för den approximationen och ange intervallet där värdet $\arctan(x)$ måste ligga enligt dessa uppskattningar. **(6p)**

Lösning.

$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

$f(x) = L(x) + E(x) = L(x) + \frac{1}{2}f''(s)(x - a)^2$

$E(x) = \frac{1}{2}f''(s)(x - a)^2$.

där s ligger mellan a och x.

I vårt fall $a = 1$; $x = 1$; $(x - a) = 0,1$; $(x - a)^2 = 0,01$.

$f(a) = \arctan(a) = \pi/4$;

$f'(x) = \frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{x^2+1}\Big|_{x=1} = 0.5$;

$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(\arctan(x)) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}\Big|_{x=1} = -\frac{2}{(1+1)^2} = -0.5$;

$f'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}(\arctan(x)) = 2\left(x^2+1\right)^{-3}\left(3x^2-1\right)$

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = \pi/4 + 0,5 \cdot 0,1 = \pi/4 + 0.05$$

;

Talet s i formeln för feltermen $E(x) = \frac{1}{2}f''(s)(x - a)^2$ ligger mellan $a = 1$ och $x = 1,1$.

Vi observerar först att $f''(s) = -\frac{2s}{(s^2+1)^2} < 0$ och $E(x) = \frac{1}{2}f''(s)(x - a)^2 < 0$.

$f'''(s) = 2\left(s^2+1\right)^{-3}\left(3s^2-1\right) > 0$ för $s \in (1,(1,1))$ eftersom $3s^2 > 1$ för dessa s.

Detta medför att $f''(s)$ är en växande funktion på det intervallet (och är negativ). Det gör att minimala (och negativa) värdet för $f''(s)$ på intervallet $[1,(1,1)]$ antas i punkten $s = 1$, d.v.s. $f''(1) < f''(s) < 0$. Absolut belopp av $|f''(s)|$ antar då sitt maximum i punkten $s = 1$, d.v.s. $|f''(s)| < |f''(1)|$.

$f''(1) = -\frac{2}{(1^2+1)^2} = -0.5$

Vi ser att $\frac{1}{2}f''(1)(x - a)^2 < \frac{1}{2}f''(s)(x - a)^2 < 0$ eller $\frac{1}{2}f''(1)(0,1)^2 < \frac{1}{2}f''(s)(0,1)^2 < 0$ och till slut

$\frac{1}{2}f''(1)(0,1)^2 = -0,25(0,1)^2 = -0,0025$ och då

$$-0,0025 < E(x) < 0.$$

Detta medför att $\pi/4 + 0.05 - 0.0025 \ < \arctan(1,1) = L(x) + E(x) < L(x) = \pi/4 + 0,05$ och

$$\pi/4 + 0.047\,5 < \arctan(1,1) < \pi/4 + 0,05$$

eftersom $0.05 - 0.0025 \ = 0.0475$

5. **Gränsvärden.** Beräkna gränsvärdet: $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln(x)}\right)$ **(6p)**

Lösning. Låt $x = 1 + y$:

$\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right) = \left(\frac{(x\ln x - x + 1)}{(x-1)(\ln x)}\right) = \left(\frac{((1+y)\ln(1+y) - 1 - y + 1)}{(y)(\ln(1+y))}\right) = \frac{((y+1)\ln(y+1) - y)}{y\ln(y+1)} = \frac{\left((y+1)(y - \frac{1}{2}y^2 + O(y^3)) - y\right)}{y\ln(y+1)}$
$= \frac{\left(y^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^3 + O(y^3)\right)}{y\ln(y+1)} = \frac{\left(\frac{1}{2}y^2 + O(y^3)\right)}{y\ln(y+1)} = \frac{1}{\ln(y+1)}\left(\frac{1}{2}y + O\left(y^2\right)\right) = \frac{1}{(y+O(y^2))}\left(\frac{1}{2}y + O\left(y^2\right)\right) =$
$\frac{1}{(1+O(y))}\left(\frac{1}{2} + O\left(y\right)\right)$ då $y \to 0$. Detta medför att
$\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x\ln x - x + 1)}{(x-1)(\ln x)}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{((1+y)\ln(1+y) - 1 - y + 1)}{(y)(\ln(1+y))}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{(1+O(y))}\left(\frac{1}{2} + O\left(y\right)\right)\right) = \frac{1}{2}.$

6. **Geometri i rummet.** Beräkna avståndet mellan punkten $A = (1,-1,-2)$ och linjen $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-8}{-2}$

(4p)

Lösning.

Avståndet d mellan linjen med ekvationen $\frac{x-x_0}{V_x} = \frac{y-y_0}{V_y} = \frac{z-z_0}{V_z}$ där $\overrightarrow{V}$ är riktningsvektor och $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ är en punkt på linjen och en annan punkt $A = (A_x, A_y, A_z)$ är:

$$d = \frac{\left|\left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{P}_0\right) \times \overrightarrow{V}\right|}{\left|\overrightarrow{V}\right|}$$

$\overrightarrow{A} - \overrightarrow{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -10 \end{bmatrix}; \overrightarrow{V} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{P}_0\right) \times \overrightarrow{V} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 4 & 1 & -10 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} = 18i - 22j + 5k = \begin{bmatrix} 18 \\ -22 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\left|\left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{P}_0\right) \times \overrightarrow{V}\right| = \sqrt{18^2 + 22^2 + 5^2} = \sqrt{833} = 7\sqrt{17}$

$\left|\overrightarrow{V}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17}$

$d = \frac{\left|\left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{P}_0\right) \times \overrightarrow{V}\right|}{\left|\overrightarrow{V}\right|} = 7$

7. **Geometri i rummet.** Ange ekvationen för ett plan genom punkten $P_0 = (1, 2, -3)$ som är parallelt med två linjer med ekvationer $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-7}{3}$ och $\dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+3}{-1}$. **(6p)**

   Lösning.

   Ekvation för ett plan med normalvektorn $\overrightarrow{N}$ genom en punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ är: $N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0) + N_z(z - z_0) = 0$.

   Vi behöver bestämma normalen till sökta planet. Den kan väljas som vektorprodukt av riktningsvektorer $\overrightarrow{V}_1$, $\overrightarrow{V}_2$ av givna linjer eftersom båda linjerna parallella med sökta planet måste vara vinkelräta mot planets normal.

   $$\overrightarrow{V}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \overrightarrow{V}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}; \overrightarrow{V}_1 \times \overrightarrow{V}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix} = \overrightarrow{N}$$

   Ekvationen för sökta planet kan skrivas som

   $9(x-1) + 11(y-2) + 5(z+3) = 0$, eller $9x + 11y + 5z - 16 = 0$.

8. **Vektorer.** Betrakta triangeln ABC med hörnpunkter A, B, C med vektorter $\overrightarrow{AB}$, och $\overrightarrow{AC}$ givna.

   Ange en formel som ger vektorn $\overrightarrow{AM}$ där punkten M är mittenpunkt på sidan BC i triangeln. **(6p)**

   Lösning.

   $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 0.5\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = 0.5(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$

   Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 50 ; **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40