Datum: 2014-08-19 | Tid: förmiddag
Hjälpmedel: inga. **Mobiltelefoner är förbjudna.**
Telefonvakt: Anna Persson, Tel.: 0703-088304

Lösningar till tenta i TMV036 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats.** Formulera och bevisa formeln för derivatan av produkt av två funktioner. **(6p)**

   Kolla beviset i Adams.

2. **Kontinuitet**.

   i) Definiera vad betyder att en funktion f är kontinuerlig i en punkt a.

   ii) Två funktioner f och g,är båda odefinierade i punkten $x = 0$: $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)\exp(x)$ och $g(x) = x\ln(x)$.

   Bestäm om någon av dessa funktioner kan utvidgas till punkten $x = 0$ (d.v.s. om $f(0)$ eller $g(0)$ kan definieras i punkten $x = 0$) så att funktionen blir kontinuerlig i den punkten. I fall det är omöjligt förklara varför.

   (6p)

   f is continuerlig i a om gränsvärdet $\lim_{x\to a} f(x)$ existerar och $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

   Funktionen f kan inte definieras i origo så att utvidgade funktionen blir kontinuerlig. $\lim_{x\to 0}\exp(x) = 1$ och $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ antar värdena $+1$ och -1 oändligt många gånger eftersom $\frac{1}{x} \to \infty$ från höger och $\frac{1}{x} \to -\infty$ från vänster.
   Det gör att produkten $\cos\left(\frac{1}{x}\right)\exp(x)$ kan inte ha ett gränsvärde eftersom den antar värdena oändligt nära $+1$ och oändligt nära -1 då $x \to 0$.

   För $g(x) = x\ln(x)$ kan vi prata om möjlig höger kontinuitet eftersom $\ln(x)$ är definierad bara för $x > 0$.

   $g(x) = x\ln(x)$ kan definieras i origo som $g(0)$ och blir högerkontinuerlig efter den utvidgning, eftersom $\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = 0$. Man kan visa det med hjälp av l'Hopitals regel .

   $\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1/x}{-1/x^2}\right) = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0.$

3. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen:

   $$g(x) = |x+1|\, e^{-x^2}$$

   Bestäm punkter där funktionen är kontinuerlig, singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum om de finns. **(6p)**

   Bestäm de intervall där funktionen är växande, avtagande, böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. **(4p)**

   Vi betraktar funktionen separat på intervall $x < -1$ och på intervall $x > -1$.

   $$g(x) = \begin{cases} (x+1)\exp(-x^2); x \geq -1 \\ -(x+1)\exp(-x^2); x < -1 \end{cases}$$

$g'(x) = \begin{cases} \left(e^{-x^2}\right)(1-2x^2-2x)\,;x>-1 \\ \left(e^{-x^2}\right)(-1+2x^2+2x)\,;x<-1 \end{cases}$ Värdfen av vänster och höger derivata i punkten $x=-1$ är olika: $\pm e^{-1}$ som gör att det är en singulär punkt. Rötter till derivatan är samma som rötter till polynomet $P(x) = 2x^2+2x-1$ framför exponentet, eftersom själva exponentet är alldrig noll. Tecknet plus eller minus framför gör ingen sjillnad. Polynomet $2x^2+2x-1$ har rötter $\begin{bmatrix} x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Vi observerar att $x_2 < -1$ och $x_2 > 0$, eftersom $\sqrt{3} > 1$.

Detta gör att $g(x)$ har två stationera punkter, en i området $x < -1$ och en i området $x > -1$. Runt x_2 är derivatan $g'(x)$ positiv åt vänster från x_2 och är negative år höger från x_2. Samma gäller derivatans beteende runt punkten x_1. Det gör att funktionen g har ett lokalt maximum både i x_1 och i x_2.

Vi har också ett lokalt minimum i singulära punkten $x_s = -1$, eftersom funktionen avtagar åt vänster från punkten och växer åt höger från punkten (derivatan är negativ åt vänster och positiv åt höger).

Vi observerar att $g(-1) = 0$ och $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ och $g(x) > 0$ för alla punkter förutom $x = -1$. Det gör att g har ett absolut minimum i $x_s = -1$. Vi observerar också att $g(x_2) < g(x_1)$ Det gör att $g(x_1)$ är ett absolut maximum.

Funktionen är växande på intervall $(-\infty, x_2)$, $(-1, x_1)$ och är avtagande på intervall $(x_2, -1)$, (x_1, ∞).

Vi beräknar andra derivatan för att undersöka konkavitets egenskaper av grafen.

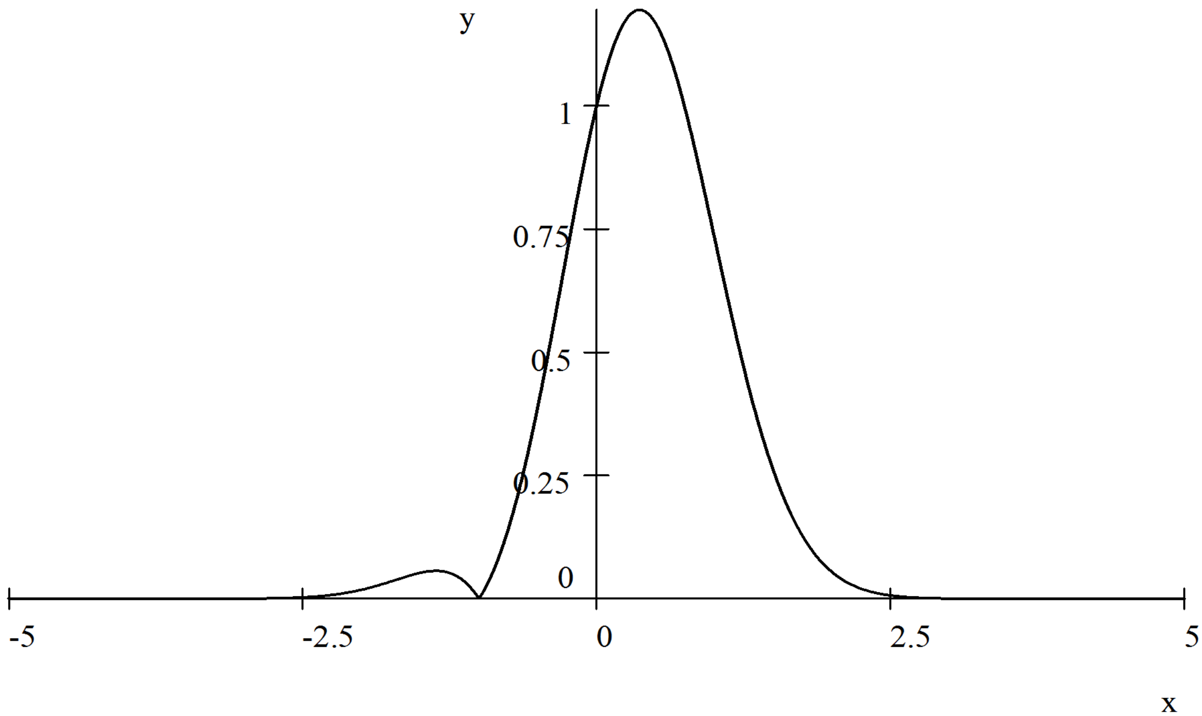
$g''(x) = \begin{cases} 2\left(e^{-x^2}\right)(2x^2-3x+2x^3-1)\,;x \geq -1 \\ -2\left(e^{-x^2}\right)(2x^2-3x+2x^3-1)\,;x<-1 \end{cases}$ där $2x^2-3x+2x^3-1 = (x-1)(4x+2x^2+1)$.

Andra derivata en rot $x_3 = 1$ som är lätt att gissa och två andra: $\begin{bmatrix} x_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}-1 \\ x_5 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}-1 \end{bmatrix}$

Vi observerar att $x_3 > 0$, $-1 < x_4 < 0$, $x_5 < -1$. Alla dessa punkter svarar mot böjningspunkter på grafen av funktionen. Konkav egenskaper beror på tecknet av $g''(x)$.

Funktionen $g(x)$ är konkav upp på intervall $(-\infty, x_5)$, $(-1, x_4)$, $(1, \infty)$.

Funktionen $g(x)$ är konkav neråt (convex) på intervall $(x_5, -1)$, (x_4, x_5). Grafen till g följer:



4. **Taylors polynom.** Betrakta funktionen $f(x) = \arctan(x)$ och ange dess Taylors polynom av grad 3 kring punkten $a = 1$. **(6p)**

$\arctan(1) = \pi/4$; $\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{x^2+1}$; $\frac{d^2}{dx^2}(\arctan(x)) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$; $\frac{d^3}{dx^3}(\arctan(x)) = \frac{8x^2}{(x^2+1)^3} - \frac{2}{(x^2+1)^2} = 2(x^2+1)^{-3}(3x^2-1)$

$\arctan(x) = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}(x-1)^1 - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + O\left((x-1)^4\right)$

5. **Gränsvärden.** Beräkna gränsvärdet: $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos(x)\sqrt{\cos(2x)}}{x^2}\right) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{8}x^2 + O\left(x^3\right)$

(6p)

$\frac{d}{dx}\left(1-\cos(x)\sqrt{\cos(2x)}\right) = \frac{1}{\sqrt{\cos(2x)}}\sin 3x$; $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$;

l'Hlopitals regel medför att $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)\sqrt{\cos(2x)}}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{\cos(2x)}}(\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x)}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{(\sin 3x)}{2x\sqrt{\cos(2x)}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{2x}\right) = 3/2$

Alternativ lösning använder elementär metod med att multiplicera med ett konjugat uttryck.

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)\sqrt{\cos(2x)}}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(1-\cos(x)\sqrt{\cos(2x)}\right)\left(1+\cos(x)\sqrt{\cos(2x)}\right)}{x^2\left(1+\cos(x)\sqrt{\cos(2x)}\right)}\right) =$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(1-\cos^2(x)\cos(2x)\right)}{x^2\left(1+\cos(x)\sqrt{\cos(2x)}\right)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(1-(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4))^2\left(1-\frac{4x^2}{2}+O(x^4)\right)\right)}{x^2\left(1+\cos(x)\sqrt{\cos(2x)}\right)}\right) =$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(1-\left(1-2\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+O(x^{4)}\right)\left(1-\frac{4x^2}{2}+O(x^4)\right)\right)}{x^2\left(1+\cos(x)\sqrt{\cos(2x)}\right)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(1-1+x^2+\frac{4x^2}{2}+O(x^4)\right)}{x^2\left(1+\cos(x)\sqrt{\cos(2x)}\right)}\right) =$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\frac{6x^2}{2}+O(x^4)\right)}{x^2\left(1+\cos(x)\sqrt{\cos(2x)}\right)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(3+O(x^2)\right)}{\left(1+\cos(x)\sqrt{\cos(2x)}\right)}\right) = \frac{3}{2}$

6. **Geometri i rummet.** Ange ekvationen för ett plan genom punkten $P = (7, -5, 1)$ så att det skär likadana sträckor av koordinataxlar. **(4p)**

   Ekvationen för planet som skär likadana, t.ex. H sträckor av koordinatahlar ser ut som $\frac{x}{H} + \frac{y}{H} + \frac{z}{H} = 1$. Koordinater av punkten M på planet måste uppfylla ekvationen: $\frac{7}{H} + \frac{-5}{H} + \frac{1}{H} = 1$. Det er en ekvation för H:

   $7 - 5 + 1 = H = 3$. Vi får den sökta ekvationen: $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$, eller $x + y + z = 3$.

7. **Geometri i rummet. Visa att planet med ekvationen** $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ skär sträckan mellan punkterna $M_1 = (3, -2, 1)$ och $M_2 = (-2, 5, 2)$. **(6p)**

   Planets ekvation $ax+by+cz+d = 0$ kan skrivas som $n_x(x-A_x)+n_y(y-A_y)+n_z(z-A_z) = 0$ där A är en punkt på planet. Om vi sätter istället för (x, y, z) koordinater (M_x, M_y, M_z) av en punkt M utanför planet, så får vi skalär produkt av vektorn $\overrightarrow{AM}$ med normalen till planet.Beroende på vilken sidfa planet ligger punkten M får fi plus eller minus tecken. Om två punkter M_1 och M_2 ligger på olika sidor planet, så måste tecken av uttrycket $n_x(M_x - A_x) + n_y(M_y - A_y) + n_z(M_z - A_z)$ eller som är samma $aM_x + bM_y + cM_z + d$ vara olika för punkterna M_1 och M_2. Detta är lätt att beräkna: $3(3)-4(-2)-2(1)+5 = 20$ för M_1 och $3(-2)-4(5)-2(2)+5 = -25$. Detta medfär att punkterna ligger på olika sidor planet, och sträckan mellan dem måste skära planet.

8. **Vektorer.** Tre hörnpunkter i en parallellogram $ABCD$ är givna: $A = (3, -4, 7)$, $B = (-5, 3, -2)$, $C = (1, 2, -3)$. Ange fjärde hörnpunken D i parallellogrammen. **(6p)**

   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$; $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}$; $\Longrightarrow \overrightarrow{D} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}$

   $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix}$$

   $$\overrightarrow{D} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

   Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 50 ; **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40