Studio 1b: Linjär algebra i $\mathbb{R}^n$: basbyte, Gram-Schmidt och ortogonal transformation.

Analys och Linjär Algebra, del C, K1/Kf1/Bt1, vt09

14 januari 2009

1 Basbyte

Låt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s}_1 &= [1;\ 2;\ 3],\ = (1,\ 2,\ 3)^{\mathrm{T}} \\
\boldsymbol{s}_2 &= [3;\ 2;\ 1], \\
\boldsymbol{s}_3 &= [0;\ 1;\ 1], \\
S &= [\boldsymbol{s}_1\ \boldsymbol{s}_2\ \boldsymbol{s}_3], \\
\boldsymbol{e}_1 &= [1;\ 0;\ 0], \\
\boldsymbol{e}_2 &= [0;\ 1;\ 0], \\
\boldsymbol{e}_3 &= [0;\ 0;\ 1], \\
I &= [\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3].
\end{aligned}$$

Vektorerna $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ är tre linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$. Alltså bildar de en bas i $\mathbb{R}^3$. Den kallas standardbasen och kallas här den *gamla* basen.

Även vektorerna $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3$ är tre linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$. Dessa utgör alltså en bas i $\mathbb{R}^3$. Vi kallar denna den *nya* basen.

Låt $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$. Vi får då $S\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{s}_1 + y_2\boldsymbol{s}_2 + y_3\boldsymbol{s}_3$, det vill säga en linjärkombination av basvektorerna i den nya basen. Om dessa basvektorer uttrycks i den gamla basen (standardbasen), vilket är fallet här, så innebär det att om $\boldsymbol{y}$ är vektorn $\boldsymbol{x}$ uttryckt i nya basen, så är $S\boldsymbol{y}$ vektorn $\boldsymbol{x}$ uttryckt i gamla basen. Låter vi $[\boldsymbol{x}]_S$ beteckna $\boldsymbol{x}$ uttryckt i nya basen, det vill säga $\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{x}]_S$ gäller således $\boldsymbol{x} = S[\boldsymbol{x}]_S$.

Kolonnerna i matrisen S är linjärt oberoende, vilket innebär att $\det(S) \neq 0$. Därmed existerar inversen S^{-1}. Koordinaterna med avseende på nya basen ges av $[\boldsymbol{x}]_S = S^{-1}\boldsymbol{x}$.

Uppgifter

1. Visa att $\{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3\}$ är en linjärt oberoende mängd.
2. Beräkna koordinaterna $[\boldsymbol{x}]_S$ med avseende på den nya basen för
   (a) $\boldsymbol{x} = [1; 1; 1]$;
   (b) $\boldsymbol{x} = [6; 4; 2]$;
   (c) $\boldsymbol{x} = [0; -1; -1]$.
   (d) $\boldsymbol{x} = [0; 1; -1]$.

2 Ortonormal bas, Gram-Schmidts metod

I många beräkningar får man uttryck som $\boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{s}_j$ och $\|\boldsymbol{s}_i\|$ för basvektorerna $\boldsymbol{s}_i$ och $\boldsymbol{s}_j$. Det blir enklare räkningar om vi då har $\boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{s}_j = 0$ för $i \neq j$ och $\boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{s}_i = \|\boldsymbol{s}_i\|^2 = 1$. Det första villkoret är att basvektorerna är ortogonala, det vill säga vinkelräta mot varandra, och det andra är att vektorerna är normerade, det vill säga har längd 1. En sådan bas kallas *ortonormal*.

En bas $\{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3\}$ kan ombildas till en ortonormal bas $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ med Gram-Schmidts metod. Det sker i följande steg:

(a) Låt $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{s}_1$. Normera: $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1/\|\boldsymbol{v}_1\|$.

(b) Låt $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{s}_2 - t\boldsymbol{u}_1$ vara en linjär kombination av $\boldsymbol{s}_2$ och $\boldsymbol{u}_1$. Koefficienten t_1 bestäms så att $\boldsymbol{v}_2$ är ortogonal mot $\boldsymbol{u}_1$:

$$0 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{s}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 - t_1(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{s}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 - t_1,$$

det vill säga $t_1 = \boldsymbol{s}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1$. Normera sedan: $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2/\|\boldsymbol{v}_2\|$.

(c) Låt $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{s}_3 - t_1\boldsymbol{u}_1 - t_2\boldsymbol{u}_2$ vara en linjär kombination av $\boldsymbol{s}_3$, $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$. Bestäm koefficienterna t_1 och t_2 så att $\boldsymbol{v}_3$ är ortogonal mot $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$:

$$0 = \boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{s}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 - t_1(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1) - t_2(\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{s}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 - t_1,$$

det vill säga $t_1 = \boldsymbol{s}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1$, och

$$0 = \boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{s}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2 - t_1(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2) - t_2(\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{s}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2 - t_2,$$

det vill säga $t_2 = \boldsymbol{s}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2$. Normera sedan till $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}_3/\|\boldsymbol{v}_3\|$.

(d) Bilda matrisen $Q = [\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3]$.

Av metoden framgår att $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ är ortogonala mot varandra och att de är normerade, det vill säga de bildar en ortonormal bas.

Uppgifter

1 Använd Gram-Schmidts metod på basen $\{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3\}$ där
$\boldsymbol{s}_1 = [1; 2; 3], \boldsymbol{s}_2 = [3; 2; 1], \boldsymbol{s}_3 = [0; 1; 1]$.

2 Visa att Q är en ortogonal matris genom att beräkna $Q^{\mathrm{T}}Q$ och QQ^{T}.

3 Man kan även normera vektorerna $\boldsymbol{v}_i$ i efterhand, när samtliga dessa har beräknats. Hur beräknas då koefficienterna t_1 och t_2?

3 Ortogonal transformation

Vi beräknade ovan en ortonormal bas $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$. Ekvationen $\boldsymbol{x} = Q[\boldsymbol{x}]_Q$ ger sambandet mellan $\boldsymbol{x}$, det vill säga koefficienterna för vektorn $\boldsymbol{x}$ med avseende på standardbasen (den gamla basen) och $[\boldsymbol{x}]_Q$, det vill säga koefficienterna för vektorn $\boldsymbol{x}$ med avseende på den nya basen $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$. Matrisen $Q = [\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3]$ innehåller de nya basvektorerna uttryckta i den gamla basen.

Kolonnerna i Q är ortonormala, vilket innebär att den inversa matrisen Q^{-1} existerar och uppfyller $Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$. De nya koefficienterna ges alltså av $[\boldsymbol{x}]_Q = Q^T\boldsymbol{x}$. Basbyten mellan ortonormala baser bevarar både vektorernas längder och deras skalärprodukter, det vill säga $\|[\boldsymbol{x}]_Q\| = \|\boldsymbol{x}\|$ och $[\boldsymbol{x}]_Q \cdot [\boldsymbol{y}]_Q = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$.

Uppgifter

1 Beräkna koordinaterna $[\boldsymbol{x}]_Q$ med avseende på den nya basen för

(a) $\boldsymbol{x} = [1; 1; 1]$;
(b) $\boldsymbol{x} = [6; 4; 2]$;
(c) $\boldsymbol{x} = [0; -1; -1]$.
(d) $\boldsymbol{x} = [0; 1; -1]$.

Kontrollera i varje exempel att normerna av vektorerna $\boldsymbol{x}$ och $[\boldsymbol{x}]_Q$ är lika, det vill säga $\|\boldsymbol{x}\| = \|Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\|$. Kontrollera också att skalärprodukten inte förändras av transformation till den nya basen, det vill säga att $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \cdot Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$.

2 Visa att $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \cdot Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ genom att utnyttja $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$. Visa också att $\|[\boldsymbol{x}]_Q\| = \|\boldsymbol{x}\|$ följer från $[\boldsymbol{x}]_Q \cdot [\boldsymbol{y}]_Q = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$.