Studio 2a: System av differentialekvationer, riktningsfält

Analys och Linjär Algebra, del C, K1/Kf1/Bt1, vt09

23 januari 2009

1 Riktningsfält

Vi studerar differentialekvationen $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}$ för $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$. Vi går under föreläsningen på onsdag morgon igenom hur man löser sådana ekvationer analystiskt. I studiolab 3b kommer vi att behandla numeriska lösningar av dem. I denna lab ska vi betrakta en metod för att studera de grundläggande egenskaperna hos samtliga lösningar, oavsett initialvärden.

För varje initialvärde har vi en (okänd) lösning $\boldsymbol{x}(t)$. Om vi istället betraktar $\boldsymbol{x}'$ som funktion av $\boldsymbol{x}$ enligt den ekvation som är given har vi en vektorvärd funktion i lika många variabler. Sådana funktioner kallas vektorfält och kommer att studeras mer i slutet av kursen. Här ska vi bara plotta vektorfältet. I varje punkt $\boldsymbol{x}$ har vi en vektor, som vi åskådliggör med en pil i vektorns riktning och längd.

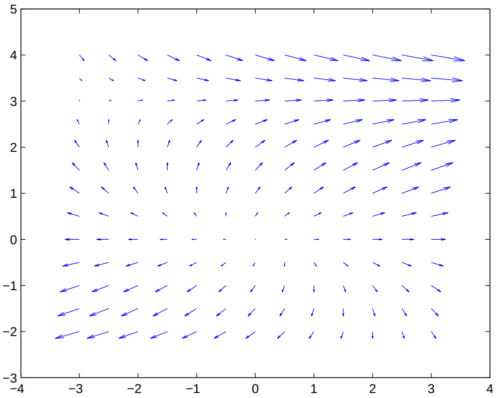
Genom att plotta detta vektorfält får vi ungefärlig information om hur lösningen $\boldsymbol{x}(t)$ till ekvationen beter sig för samtliga möjliga startvärden. Om en partikel färdas längs kurvan $\boldsymbol{x}(t)$ ges dess hastighet av $\boldsymbol{x}'$, det vill säga $A\boldsymbol{x}$, vilket är det som vi ska rita ut. Vi kan alltså skapa kurvan $\boldsymbol{x}(t)$ genom att sätta pennan på den startpunkt vi önskar och sedan följa pilarna.

För att plotta vektorfältet använder vi kommandot `quiver`. Vi skriver då `quiver(X, Y, VX, VY, s)`, där X och Y är matriser med x- och y-koordinaterna där vi vill plotta, VX och VY är matriser med x- och y-komponenterna för den vektor vi vill plotta på dessa positioner, och s är en skalfaktor som vi kan välja lagom stor för att pilarna inte ska bli för långa eller korta. De fyra matriserna X, Y, VX, VY är således lika stora och i varje given position i dessa har vi x, y, $F_1(x, y)$ och $F_2(x, y)$ för vektorfältet $\boldsymbol{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$.

Vi betraktar till exempel fältet $\boldsymbol{F}(x, y) = (x + y, 2\sin(y))$, det vill säga $F_1(x, y) = x + y$ och $F_2(x, y) = 2\sin(y)$. Med raderna

```
>> x = -3:.5:3;
>> y = -2:.5:4;
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);
>> quiver(X, Y, X+Y, 2*sin(Y))
```

erhålls figuren



Figur 1: Pilarnas riktning visar fältets riktning.

Uppgifter

Betrakta system $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ för matriserna A givna nedan. Rita riktningsfälten för dessa. Fältet beskrivs formodligen enklast med

```
quiver(X, Y, A(1, 1)*X + A(1, 2)*Y, A(2, 1)*X + A(2, 2)*Y)
```

Rita i samma graf egenvektorerna till A och jämför fältets riktning med egenvektorerna och motsvarande egenvärden. Förklara sambandet mellan riktningsfältet och matrisens egenvärden och egenvektorer. När utgör origo en **källa** (alla lösningar strömmar från origo), en **sänka** (alla lösningar strömmar till origo), en **sadelpunkt** (lösningarna går mot origo men avviker sedan) eller en **spiralpunkt** (lösningarna går i spiral kring origo)?

Den som inte orkar beräkna alla egenvärden och egenvektorer för hand kan använda kommandot `eig` som gör detta. Anropar man med `[V, D] = eig(A)` hamnar egenvärdena för matrisen A längs diagonalen i D och egenvektorerna blir kolonner i V.

Rita också lösningen till diffekvationen för några startvärden som ni hittar på själva. Lösningen ges av formeln

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\boldsymbol{v}_2 e^{\lambda_2 t},$$

där $\boldsymbol{v}_i$ är egenvektorerna till A, λ_i motsvarande egenvärden och c_i koefficienter som bestäms av startvärdena. Koefficienterna kan bestämmas genom att vi sätter $t = 0$, vilket ger

$$\boldsymbol{x}(0) = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = V\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Samla slutligen alla dessa utritningar i ett program som givet matrisen A och startpunkt $\boldsymbol{x}(0)$ ritar riktningsfält, egenvektorer och lösningen till diffekvationen för ett lagom långt intervall på t.

1.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

4.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}.$$